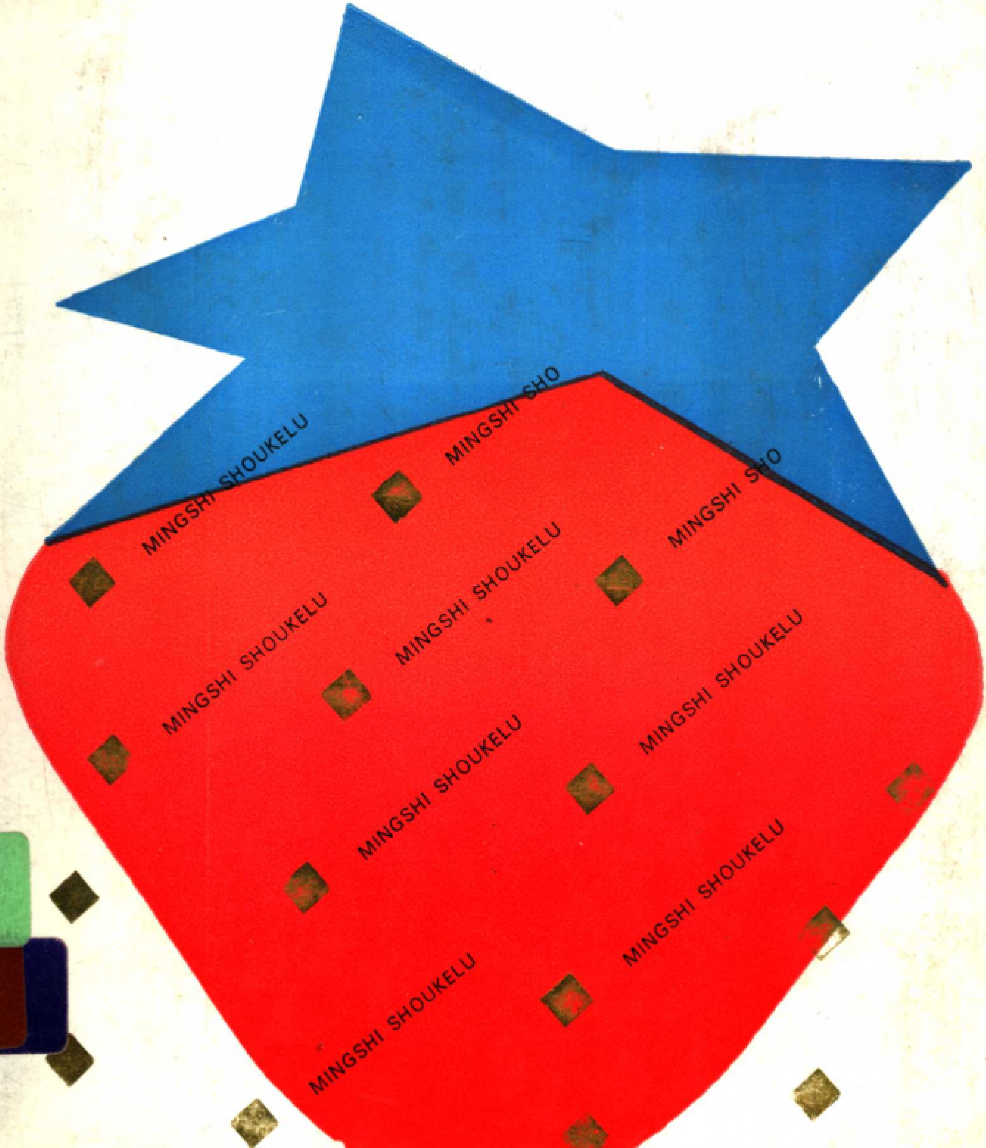
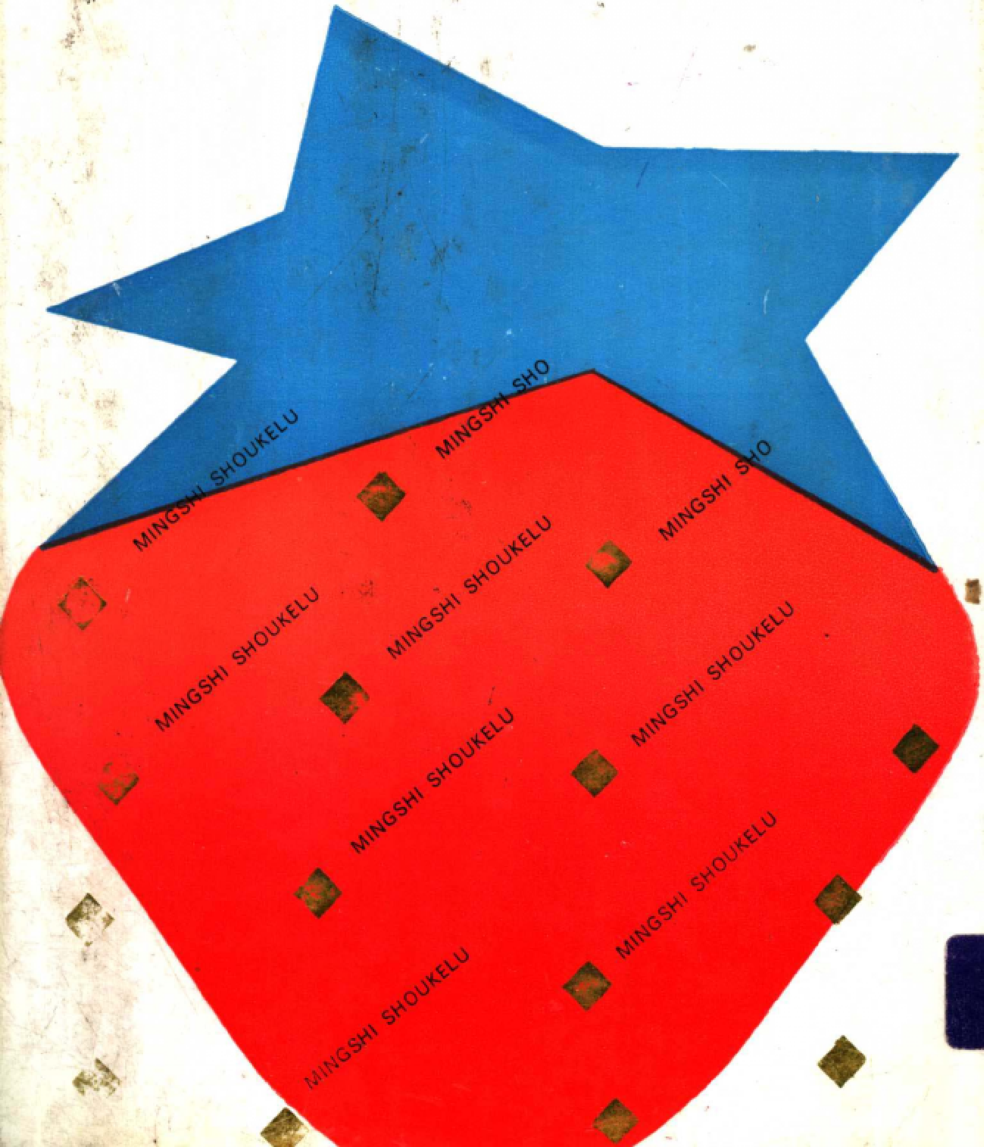
名师授课录

（中学数学）·初中版



名师授课录

（中学数学）·初中版

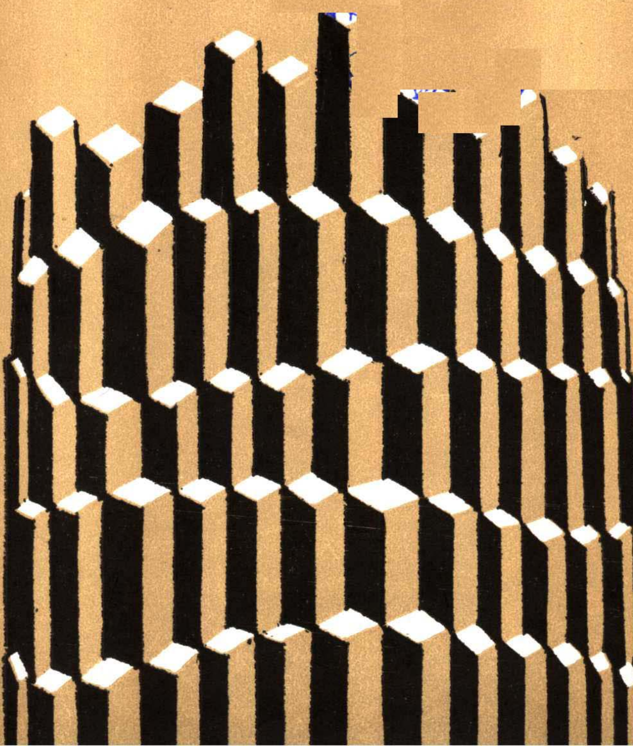


名師授課録

（中学数学）·初中版

名师授课录（中学数学）编委会 编

上海教育出版社



责任编辑　李俊明
　　　　　王耀东
封面设计　姜品珠

名 师 授 课 录
(中 学 数 学)
初 中 版
《名师授课录》(中学数学)编委会编
上海教育出版社出版发行
(上海永福路 123 号)
各地新华书店经销　上海市印刷六厂印刷
开本 850×1156　1/32　印张 15.5　插页 5　字数 381,000
1992 年 8 月第 1 版　1998 年 6 月第 7 次印刷
印数 28211-30230 本
ISBN 7-5320-2644-2/G·2578　定价：(精)24.00元

序

数学教育是我国的一项传统的教育，早在春秋战国时代就有“六年(岁)教之数与方名”的记载，促进了我国古代数学的重大进步.

新中国成立以后，我国的数学教育更是得到发展，一批又一批优秀的数学教师涌现出来，他们用自己创造性的劳动培养了千百万社会主义事业的建设者．与此同时，也极大地丰富了数学教育科学．数学教育是一门科学，科学是需要研究的，研究者的主体就是广大的数学教师．从这个意义上说，教师既是实际工作者，也是理论工作者，教案就是教师的理论作品之一．优秀的数学教案应



当说是一篇数学与教育科学、理论与实践相结合的创造性劳作，是提高数学教育质量的可靠保证.

上海师范大学数学教育科学研究室和上海教育出版社数学编辑室的同志们，正是从这个认识出发，积极、慎重、认真地征集和编辑了这套《名师授课录》(中学数学). 我认为这是一件很有意义的工作，应当得到肯定和支持的.

《名师授课录》(中学数学)用教案集的形式辑录了我国一些著名的中学数学教师的典型教案及其评注，力求反映作者正确的教育思想，丰富的教学经验，独特的教学风格以及显著的教学效果. 作为经验总结和理论建树，《名师授课录》(中学数学)会有效地推进我国的中学数学教育事业，又作为资料积累，它记载了名师们的卓杰业绩. 当然，教无定法，任何好的教案都会有一定的局限性，它受到教育环境，特别是学生情况的影响和制约. 对待《名师授课录》(中学数学)中的教案，我们也应当采取辩证的态度，将别人的经验、理论与自己的教学实践相结合，使经验和理论不断地得到检验、充实和完善.

我希望《名师授课录》(中学数学)将对我国广大的中学数学教师提高从事教学改革的自觉性，加强理论修养，改进教学方法有所帮助，对提高中学数学教育质量，发展数学教育事业起到积极的作用. 我更相信《名师授课录》(中学数学)的出版，对于祖国教育事业的发展必将起到锦上添花的作用.

苏步青

1989年9月17日

编者的话

在我国广大中学数学教师的支持下，在作者和编者们的共同努力下，《名师授课录》(中学数学)现在与读者见面了.

编著《名师授课录》(中学数学)的目的，不仅是以教案的形式反映我国中学数学名师们正确的教育思想、丰富的教学经验、独特的教学设计和显著的教学效果，也是为了满足在教育第一线的广大的中学数学教师的需要，为他们提供具有启发性和实用价值的参考书. 当然，名师们的优秀的教育思想和方法，对于将要走上教育岗位的师范院校的学生，也是很好的参考资料. 正因为这样，《名师授课录》(中学数学)的编审自始至终是从作者和读者两个方面来加以考虑的，即既充分而有效地反映作者有价值的思想内容和具体做法，又认真而切实地估计到读者的需要和可能提出的问题.

具体地说，在内容的选择上，本书顾及到了现行中学数学课本中的各个分科和各个单元；对教材中的重点和难点，力求在授课录中加以溯导，以利于读者. 在教学风格和方法的选择上，本书尽可能地博采众长，力求较全面地反映我国中学数学教学中的各种风格和方法，以便读者参考和吸收. 在授课录的表述上，本书除了对每一篇授课录作出较完整的表述外，还通过评注和说明的形式，力图使各种具体的实践得到理论上的提炼，使读者在学习和吸收先进经验的同时，得到理论上的提高.

《名师授课录》(中学数学)分高中版和初中版两册. 本书是初中版，全书的稿件组织采取了征稿和组稿相结合的办法，即先在上

海师范大学《中学数学教学》杂志上刊登征稿启事；而后根据来稿录用的情况，向一些地区有关的教育行政部门发出公函，要求推荐名师；在推荐和了解的基础上，再向名师们发出约稿特函. 我们希望录用的稿件在数量上能做到地区间的相对平衡，但由于篇幅限制以及其他各种原因，一些好的名师们的来稿未能被录用，而有些著名的中学数学教师我们又未能征得来稿，这些都是应该表示歉意的.

《名师授课录》(中学数学)的作者都是具有特级或高级中学教师职称，在全国或所在地区内有一定知名度的中学教师，其中特级教师占了很大比例. 很多同志曾被授予过各种荣誉称号. 当然，即使是名师们的作品也不可能是完美无缺的，正像我国著名数学家苏步青教授在本书的序中所说，“教无定法，任何好的教案都会有一定的局限性，它受到教育环境，特别是学生情况的影响和制约.”书中载录的教案虽都是成功的、优秀的，但仍然是相对而言的.

参加本书审编工作的是上海师范大学数学系数学教育科学研究室的部分教师，其中罗肇华、张方盛同志负责审编代数部分；



《名师授课录》(中学数学)的编委在研究讨论编写工作

余致甫、黄荣基同志负责审编几何部分；全书由袁小明同志审定并作最后修改；周锡祥同志也参加了其中的一些工作.

我们感到高兴的是，在审编《名师授课录》(中学数学)的整个过程中，得到了数学界和数学教育界前辈们的鼓励和支持，著名数学家、教育家苏步青为激励大家，欣然同意为本书作序并题名；著名特级教师赵宪初和唐秀颖担承了本书的顾问；吴宗初帮助审阅和修改了部分稿子. 我们谨向他们表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，审编工作中会有不少缺点和错误，我们恳请广大读者批评指正.

一九八九年十月于上海师范大学

目　录

正数和负数

寿纪瑗（浙江杭州学军中学）

作者简历



寿纪瑗　浙江绍兴人，1958年毕业于浙江师范学院数学系，同年任杭州大学附属中学数学教师．1987年被评为浙江省中学高级教师．现任杭州学军中学数学教研组副组长．

教学目的

(1) 使学生了解正负数的产生的背景和意义．

(2) 能用正数和负数表示常见的具有相反意义的量．

教学过程

师：今天是我们进入中学的第一堂数学课．大家知道，数学与

数是分不开的，它是一门研究数的学问．现在我们一起来回忆一下，小学里已经学过哪些类型的数？谁能回答？

（思考一下后，学生纷纷举手.）

生：学过整数、分数、小数．

师：谁能说说，整数是指哪些数？分数、小数又是些什么样的数？请举例来加以说明．

生：整数是指1，2，3，4，……

分数的例子：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ 2\frac{1}{8},\ 3\frac{4}{7},\ \cdots\cdots$$

小数的例子：

$$0.12,\ 0.035,\ 4.28,\ 13.6,\ 0.001,\ \cdots\cdots$$

师：大家再想想，还有什么数遗漏吗？

生：（气氛活跃，有的边举手边喊出声）还有0.

师：对！那么0能归入上面所说的哪一类呢？

（此时有的说0是整数，有的说0表示没有东西，它不能是整数，甚至争论起来．教师略等片刻后.）

师：对！0是整数．有的同学说0表示没有，它不能是整数．这句话不对，下面，我们将会看到，0不仅能表示没有，0也能表示有．谁能说说分数与小数之间有什么关系？

生：分数可以化成小数，例如$\frac{1}{2}=0.5$等等；小数也能化成分数，如$0.3=\frac{3}{10}$.

师：这就是说分数和小数（有限小数和循环小数）可以互化．

师：谁能举出实际生活中用分数或小数的例子？

[引导学生注意分数和小数是由于实际的需要而产生的，以便对学生进行唯物主义的教育.]

生：一块大蛋糕，5个人分吃，每人平均吃$\frac{1}{5}$块，这里的$\frac{1}{5}$是分数；买一本书要2元3角钱，可以写成2.3元，这里的2.3是小数，……

师：说得好！请大家翻开课本第1页，一起朗读第一段.

[重视课本的作用，帮助学生阅读课本，是培养学生自学能力的重要环节.]

（教师发指令，学生齐朗读.）

师：这段课文又一次告诉我们，整数和分数（小数）都是由实际的需要而产生的. 那么，有了这些数是否能满足实际的需要呢？现在请大家看一个温度计模型.

（教师挂出事先用纸板做好的温度计模型，中间槽上可以拉动的红色纸板条表示水银柱.）

师：这是一只温度计的模型，各刻度旁的数字表示温度. 现在红色水银柱指出是0℃，这里的0就不是表示没有了. 谁能说0℃就是没有温度呢？随着温度的升高，水银柱会怎样？

生：往上升.

师：（往上拉动水银柱，停于5℃）现在温度计上表示的温度是几度？

生：零上5℃.

师：（往下拉动水银柱，停于零下5℃）现在呢？

生：零下 5℃.

[这样做，有利于实现从"生动的直观"向"抽象思维"的转变.]

师：刚才是零上 5℃，现在是零下 5℃，虽然都是 5℃，但它们是具有意义相反的两个量．现实生活中，像这样的相反意义的量有很多．比如，买入 50 千克和卖出 30 千克等等．同学们能举例子吗？

生：收入 50 元和支出 30 元；前进 3 米和后退 3 米；运进 8 吨和运出 4 吨.

师：很好！同学们举出了许多具有相反意义的量．下面，我们请同学们来看一道题：

[例] 某年一月份北京的平均气温是零下 4.6℃，而广州的平均气温是零上 13.1℃，问这月份广州的平均气温比北京的平均气温高几度？

师：先请同学们考虑用什么方法解这道题.

生：用减法.

师：是哪两个数相减？

生：13.1 和 4.6.

师：是吗？有没有不同意见？

生：是零上 13.1 与零下 4.6 相减.

师：好！我们把它写成算式：

零上 13.1－零下 4.6.

师：那么怎么减呢？

（同学们面有难色，进入了沉思之中.）

师：是呀！像这样既有文字，又有数字的式子，怎么运算呢？同学们看，问题出在哪儿呀？

生(众)：出在数字前面的文字上.

师：对！这说明用在数字前面带文字来区分相反意义的量的做法是不能令人满意的．那么怎样区分相反意义的量才好呢？

生甲：用不同颜色来区分．比如，红色5℃表示零下5℃；黑色5℃表示零上5℃．

生乙：在数字前面加不同符号来区分．比如，△5℃表示零上5℃；×5℃表示零下5℃．

（学生想出各种方法，……）

师：不错！同学们成了发明家．其实，中国古代数学家就曾经采用不同的颜色来区分，古时叫做"正算黑，负算赤"．至今这种方法在记账的时候还用呐．所谓"赤字"，就是这样来的．现在，数学中采用符号来区分，规定零上5℃记作+5℃（读作正5℃）或5℃，把零下5℃记作−5℃（读作负5℃）．这样，只要在小学里学过的数前面加上"+"或"−"号，就把两个相反意义的量简明地表示出来了．于是，如果有人记录某天早、中、晚的三个气温是−2℃，+6℃，−1℃，那么大家一看便知道是什么意思了．

现在请同学们仔细看课文第1页第2段起到第3页中间一段止．

（教师观察每个学生，促使每个学生认真、专心地看书，并掌握学生看书的进度．待学生看完课文后，在教师组织下，口答书中的两个练习，一般都能顺利回答。此举也是为了落实看课本的效果及巩固新知识．但对相反意义量的举例，不要引得太远．）

师：我们把所有的正数组成一个正数集合（在黑板上随手画一个圈，以示集合的意思，在圈下面写上"正数集合"）．把所有负数组成一个负数集合（同上）．请把下面这些数：-11，4.8，$+7.3$，-2.6，$\frac{1}{6}$，$+\frac{7}{12}$，-8.12，$-\frac{3}{4}$分别填到它们所属的集合里去．

（指定学生回答，教师板书.）

师：今天，我们学习了正数与负数的概念，以及它们的表示法. 这样，我们所认识的数的范围扩大了.

布置书面作业：略.

教案说明

这堂课是在小学里学过的数的基础上，从表示具有相反意义的量引进负数的，是一堂概念课.

负数的引进是本单元的教学重点，又是难点.

从内容上来说，负数比非负数要抽象、难理解. 因此学生通过这一节课只能对负数概念有初步的理解，使学生掌握正负数的记法和它的描述性定义，要求不能过高. 对有理数的深入理解将在以后的学习中逐步加深.

这节课的教学对象是小学毕业刚进初中的学生，他们有学习的热情，但也有一个进中学后的适应过程，这就要求教师在教学方法和教学语言的选择上，尽可能注意中小学的衔接，既不违反科学性，又符合可接受性原则，课堂上要起好主导作用，并让学生有充分的活动机会，使得课堂气氛活跃，有新鲜感. 所以这堂课采取了在教师的启发引导下，师生共同探究解决的途径，以谈话法为主. 教师的语言尽量儿童化，也要注意紧扣课本，以利于学生看懂课文. 同时根据学生的年龄特点和知识基础，在课内安排阅读课本的环节是必要的，为培养学生的自学能力逐步打下基础.

正负数是以其符号形式定义的，因此相反意义的量的表示是本教案设计的着力点. 首先要让学生认识用文字来区分相反意义的量是合理的，但同时又要让学生感受到这种表示

法的缺点，从而认识到采用“+”、“-”号表示的必要性及意义.

绝 对 值

张国栋（北京教育学院西城分院）

作 者 简 历



张国栋　北京市人，1962 年毕业于北京师范大学数学系，同年任北京第三十中学数学教师．1978年调至北京教育学院西城分院任数学教师，1986 年被评为北京市中学高级教师．1989 年获北京市优秀教师称号．现任北京教育学院西城分院教学科研处主任，兼任北京数学会中学教育委员会委员，北京师范院校数学教育研究会常务理事．

教 学 目 的

(1) 使学生掌握有理数的绝对值概念及表示方法．

(2) 使学生熟练掌握有理数绝对值的求法和有关的简单计算．

教 学 过 程

一、复习旧知识

（教师出示小黑板，让学生回答下列问题，教师予以评述和总结．）

问题1 下列各数中：

$$+7,\ -2,\ \frac{1}{3},\ -8.3,\ 0,\ +0.01,\ -\frac{2}{5},\ 1\frac{1}{2},$$

哪些是正数？哪些是负数？哪些是非负数？

（学生回答以后，教师强调正数和零统称非负数．）

问题2 什么叫数轴？画一条数轴，并在数轴上标出下列各数：

$$-3,\ 4,\ 0,\ 3,\ -1.5,\ -4,\ \frac{3}{2},\ -2.$$

（如果学生所画数轴不规范，教师用尺子在黑板的右上角示范性地重新画出数轴，标好各个数．否则，表扬该学生作图规范或认真．）

问题3 依次说出上题中各数的相反数．

（在学生作完上述练习后，教师紧接着作口头提问，引导学生利用数轴思考问题．）

师：请大家观察黑板上所画的数轴和所标出的各个数．图中有哪些数是互为相反数？（学生容易漏答"零与它本身也互为相反数"，教师暂不点破．）从图上看，互为相反数的一对有理数有什么特点？

（学生回答后，教师强调：表示互为相反数的两个点的中点都恰好是原点．或者说，表示互为相反数的两个点到原点的距离相等．然后教师补充说明零与它本身也是互为相反数，嘱咐学生思考问题要全面，回答问题应注意完整性．）

师：请回答，怎样表示一个数的相反数？

(学生回答后，师生共同阅读课本，解释有关内容并重点阅读：在一个数前面添加一个“+”号，仍与原数相同；在一个数前面添加一个“−”号，就成为原数的相反数．比如：

$-(-3)=3$（口述：负3的相反数是3），

$-(4)=-4$（口述：4的相反数是−4），

……）

［由于绝对值概念直接涉及到正负数、数轴和相反数等概念，所以首先进行复习，这是理解绝对值概念的前提．复习相关知识不宜作简单的重复，应有针对性和注意学生的实际水平．同时，要引导学生充分利用数轴这个直观工具．数轴不仅可以为运算提供形象的解释，而且体现了数形结合这一重要思想方法，对以后的学习具有深远的影响．］

二、引入新课

［例1］ 两辆汽车，第一辆沿公路向东行驶了5公里，第二辆向西行驶了4公里．为了表示行驶的方向（规定向东为正）和距离，分别记作+5公里和−4公里．这样，利用有理数就可以明确表示每辆汽车在公路上的位置了（图1）．

我们知道，出租汽车是计程收费的，这时我们只需要考虑汽车行驶的距离，不需要考虑方向．当不考虑方向时，两辆汽车行驶的距离就可以记为5公里和4公里（在图上标出距离）．这里的5叫做+5的绝对值，4叫做−4的绝对值．

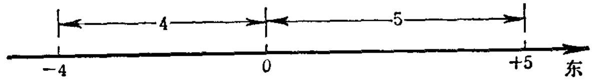


图 1

［例2］ 两位徒工分别用卷尺测量一段1米长的钢管，由于测量工具使用不当或读数不准确，甲测得结果是1.01米，乙测得

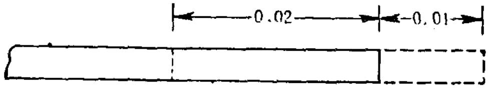


图 2

结果是 0.98 米. 甲测量的差额即多出的数记作+0.01 米，乙测量的差额即减少的数记作−0.02 米.

如果不计较测量结果是多出或减少，只考虑测量误差，那么他们测量的误差分别是 0.01 和 0.02(图 2). 这里所说的测量误差也就是测量结果所多出来或减少了的数+0.01 和−0.02 的绝对值.

如果请有经验的老师傅进行测量，结果恰好是 1 米，我们用有理数来表示测量的误差，这个数就是 0(也可以记作+0 或−0)，自然这个差额 0 的绝对值是 0.

[关于概念结构的理论，罗希提出的原型说(1975 年)认为，概念主要以原型即它的最佳实例表达出来. 一个数的绝对值实质上是该数所对应的点到原点的距离的数值. 因此，我们选用了课本上的例题作为例 1，它对于理解和形成绝对值概念是有益的. 布尔纳提出了特征表说(1979 年)，他主张从个体所具有的共同重要特征来说明概念. 所以，这里配合例 1 选用了例 2，意图是突出它们的共同特征，增强学生对绝对值概念的感性认识，同时还能对零的绝对值给出一个比较自然的解释.]

师：现在我们撇开例题的实际意义来研究有理数的绝对值. 那么，有

+5 的绝对值是 5；

−4 的绝对值是 4；

+0.01 的绝对值是 0.01；

−0.02 的绝对值是 0.02；

0 的绝对值是 0.

为了方便，我们用一种符号来表示一个数的绝对值．约定在一个数的两旁各画一条竖线来表示这个数的绝对值．如

$+5$ 的绝对值记作 $|+5|$，显然有 $|+5|=5$；

-0.02 的绝对值记作 $|-0.02|$，显然有 $|-0.02|=0.02$；

0 的绝对值记作 $|0|$，也就是 $|0|=0$．

[教师应强调绝对值号的正确写法，以使学生养成良好的书写习惯．这里教师不妨故意把 $|+5|$ 写成"1+51"的样子以引起学生的注意和重视．]

[例 3]　在数轴上分别标出下列各数：

$$+5,\ -4,\ -\frac{1}{2},\ +3,\ -5,\ +\frac{1}{2},\ 0,\ -3,$$

再分别用符号表示它们的绝对值，并求出这些数的绝对值．

（教师在黑板上画出数轴，并标出各数（图 3），再写出它们的绝对值（暂不写出答数，由学生口答）．）

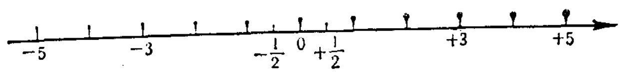


图　3

生：$|+5|=5$；$|-4|=4$；$\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$；$|+3|=3$；$|-5|=5$；$\left|+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$；$|0|=0$；$|-3|=3$．

师：一个数的绝对值与表示这个数的点到原点的距离有怎样的关系？请举例说明．

生：一个数的绝对值就是表示这个数的点到原点的距离．例如，$|-3|$ 就是表示 -3 的点到原点的距离．

师：观察例 3 的图（图 3），有哪些不同的数它们的绝对值相等？

生：-5 和 $+5$ 是不同的数，它们的绝对值相等，也就是 $|-5|$

$=5$, $|+5|=5$. 还有 $|-3|=3$, $|+3|=3$. $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, $\left|+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

师：你是怎样得出这个结果的呢？（启发学生注意到它们到原点的距离相等.）有没有遗漏？（指导学生学会按照一定的顺序来观察思考问题.）

[在教学过程中，教师要注意帮助学生掌握思考问题的方法.]

[例 4] 下列绝对值号中应填入什么数？

$$|?|=5,\ |?|=3,\ |?|=\frac{1}{2},\ |?|=0.$$

生：$+5$ 或 -5, $+3$ 或 -3, $+\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$, 0.

师：请同学们考虑：怎样的不同的数绝对值相等？绝对值相等的数是怎样的数？

（在学生回答后，教师更正或再次重复并把答案写在黑板上.）

互为相反数的两个数，它们的绝对值相等；绝对值相等的数，它们互为相反数（提醒学生注意：零与它本身互为相反数）.

三、小结，练习，作业

有理数的绝对值指的是什么？

（阅读课本）"一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零."

（稍停后指出）有理数的绝对值都是非负数.

请同学们做以下练习.

1. 下列哪些数是正数？

$$-2;\ \left|+\frac{1}{3}\right|,\ |-3|,\ |0|,\ -|+2|,\ -(-2),\ -|-2|.$$

2. 在括号里填写适当的数：

$|-3.5|=(\quad)$, $\left|+\frac{1}{2}\right|=(\quad)$, $-|-5|=(\quad)$, $-|+3|=(\quad)$,

$|(\quad)|=1,\ |(\quad)|=0,\ -|(\quad)|=-2.$

3．计算下列各题：

$|-3|+|+5|$；$|-3|+|-5|$；$|+2|-|-2|$；$|-3|-|-2|$；

$\left|-\frac{1}{2}\right|\times\left|-\frac{1}{3}\right|$；$\left|-\frac{1}{2}\right|\div|-2|$；$\frac{1}{2}\div\left|-\frac{1}{2}\right|$.

4．分别对于正数、负数和零利用数轴来考虑：一个数加上它本身的绝对值可能是负数吗？

[在学生练习进行一段时间后，教师请四位同学分别把结果写在黑板上，遇到失误处进行分析和解释，作出更正(其中第4题可依学生的实际水平供选用).]

布置作业(略).

教 案 说 明

(1) 绝对值概念的教学是中学代数教学的一个难点．在学习进程中，绝对值的内容多次出现．如在有理数中出现一次，在字母表示数中出现一次，在算术根及方程、不等式中还要再次出现．因此，教学中要把握各次的适度要求，逐步加深理解．在这里，学生是第一次接触绝对值的概念，不可能一下子深刻领悟和掌握．由于它与负数、数轴、相反数、比较大小和四则运算等概念都是有理数运算的基础，应弄清符号的意思，重点放在运算方面．

(2) 中学代数里，实数绝对值的形式定义是：$a\in R$，

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0;\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

也就是

$$a=\begin{cases}|a|, & a\geqslant 0;\\ -|a|, & a<0.\end{cases}$$

而利用数轴将表示a的点到原点的距离作为它的一种几何解释．实际上，它的几何意义反映了概念的本质，也可以作为绝对值的定

义即实质定义．一般在同一知识系统中不宜出现同一对象的两种不同定义，为了避免证明等价性的麻烦，通常以形式化的表述作为定义，另一种表述作为辅助性的解释，这在逻辑上可带来方便，其不足之处是形式定义较难理解．

教学中，我们采用的办法是重点放在对几何意义的理解上，最后再概括上升到形式定义上来．这样比较符合从感性认识上升到理性认识的规律，同时使得绝对值概念的非负性具有较扎实的基础．

(3) 在有理数绝对值的简单运算练习中，应充分利用数轴帮助思考，体现数形结合这一重要的思想方法．

有理数加法法则

杨裕前（江苏常州市教育局教研室）

作 者 简 历



杨裕前　江苏昆山人，1963年毕业于南京师范学院数学系，同年任常州市第二中学数学教师．1986年、1990年分别被评为江苏省中学高级教师、特级教师．1988年被常州市人民政府授予“常州市有突出贡献的优秀中青年专业技术人才”称号，1989年被常州市人民政府授予“常州市优秀教育工作者”称号．现任常州市教育局教研室主任．

教 学 目 的

(1) 使学生掌握有理数加法法则，并能运用法则进行计算．

(2) 在有理数加法法则的教学过程中，渗透分类、探索、归纳等思想方法，使学生感受、了解研究数学的一些基本方法．

授 课 提 纲

1．有理数加法法则

(1) 分类：结合实例列出两个有理数相加的各种情形，并用“相反意义的量”的概念，探求两个有理数相加的和.

(2) 归纳：对上述各种情形进行比较、辨析，从而归纳得出有理数加法法则.

(3) 记忆：在理解的基础上记忆有理数加法法则.

2. 有理数加法法则的应用

(1) 简单应用，强调“以理驭算”.

(2) 例题、练习，引导学生把计算技能操作化、程序化.

(3) 比较有理数加法与非负有理数加法的联系与区别，把知识系统化. 强调进行有理数加法运算时，必须同时注意：确定“和”的符号；计算“和”的绝对值，从而提高学生计算中分配“注意力”的水平，确保计算结果的正确.

教学过程

师：前面我们学习了有关有理数的一些基础知识，从今天起开始学习有理数的运算. 这节课我们来研究两个有理数的加法.

两个有理数相加，有多少种不同的情形？

[要正确回答这个问题，必须掌握分类的思想方法. 比如，研究一个有理数的问题，常常要考虑这个有理数为正、为负、为零三种情形；研究两个有理数的问题，通常要分两数同号、异号、至少有一个数为零三种情形. 这两种分类方法，可分别结合“绝对值”和“有理数大小比较”的教学早作渗透.]

为此，我们来看一个大家熟悉的实际问题：

足球比赛中赢球数与输球数是相反意义的量. 若我们规定赢球为“正”，输球为“负”. 比如，赢 3 球记为 +3，输 2 球记为 −2. 学校足球队在一场比赛中的胜负可能有以下各种不同的情形：

(1) 上半场赢了3球，下半场赢了2球，那么全场共赢了5球．也就是

$$(+3)+(+2)=+5. \quad ①$$

(2) 上半场输了2球，下半场输了1球，那么全场共输了3球．也就是

$$(-2)+(-1)=-3. \quad ②$$

现在，请同学们说出其他可能的情形．

生甲：上半场赢了3球，下半场输了2球，全场赢了1球．也就是

$$(+3)+(-2)=+1. \quad ③$$

生乙：上半场输了3球，下半场赢了2球，全场输了1球．也就是

$$(-3)+(+2)=-1. \quad ④$$

师：还有什么不同的情形吗？

生丙：上半场赢了3球，下半场不输不赢，全场仍赢3球．也就是

$$(+3)+0=+3. \quad ⑤$$

生丁：上半场输了2球，下半场两队都没有进球，全场仍输2球．也就是

$$(-2)+0=-2. \quad ⑥$$

生戊：上半场打平，下半场也打平，全场仍是平局．也就是

$$0+0=0. \quad ⑦$$

师：上面我们列出了两个有理数相加的七种不同的情形，并根据它们的具体意义得出了它们相加的和．但是，要计算两个有理数相加所得的和，我们总不能一直用这种方法．现在我们大家仔细观察比较这七个算式，看看能不能从这些算式中得到启发，想办法归纳出进行有理数加法的法则？

[这种归纳，要求学生通过观察、比较、辨析，抓住具体式子所

反映的本质，舍弃非本质的现象．这种训练对提高学生的概括能力无疑是有益的．这里，应让学生思考 2～3 分钟．]

生：从①、②两个算式可以看出，赢了再赢，赢得更多；输了再输，输得更多．因此，同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加．③、④两种情况是先赢后输或先输后赢，结果可能赢，也可能输，要看赢的球数多还是输的球数多．

师：那么怎样归纳成为运算法则呢？

生甲：异号两数相加，先看哪一个加数大，"和"就取这个加数的符号，再把两个加数的绝对值相减．

生乙：应该是：看哪一个加数的绝对值大，"和"就取这个加数的符号．

生丙："和"的符号与被加数的符号相同．

[显然，上述第一位学生的回答"词不达意"，这种语言表述不准确的现象是经常发生的，帮助学生纠正这种毛病正是数学教学中进行语言训练的有效措施．第三位学生的错误是把非本质的现象当成事物的本质，对此可用变式 $(-2)+(+3)=+1$ 加以引导、纠正．]

师：根据前面两位同学的回答，我们可以把异号两数相加的法则归纳为：

异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值．

对异号两数相加的情形，还有什么需要补充的吗？

生：……

师：上面归纳的异号两数相加的方法，先要比较两个加数绝对值的大小，然后确定"和"的符号，再计算出"和"的绝对值．那么，比较两个加数的绝对值的大小，可能出现怎样的特殊情况呢？

生：两个加数的绝对值相等．

师：对！这时的两个加数互为相反数．想一想：互为相反数的

两个数相加的和等于几？因此，异号两数相加的法则应补充说明什么？

生：互为相反数的和等于零.

师：这句话怎样说得更准确一些？

生：互为相反数的两个数相加得零.

[通过对异号两数相加的特殊情况——互为相反数的两个数相加的讨论，不仅可以帮助学生较完整地掌握有理数的加法法则，更重要的是渗透了研究一般与特殊关系的思想方法，使学生注意学会全面地考虑问题.]

师：从⑤、⑥、⑦三个算式又可归纳出有理数加法的什么法则？

生：一个数同零相加，仍是这个数.

师：上面，我们从七个算式中归纳得出了有理数加法的三条法则. 现在请同学们认真阅读课本的"有理数加法的法则".

(学生阅读课本、并记忆法则.)

师：现在我们来应用有理数加法的法则进行计算. 先请同学们口答下列算式的结果，并说明理由：

$(+4)+(+7)$，$(-4)+(-7)$，$(+4)+(-7)$，

$(+9)+(-4)$，$(+4)+(-4)$，$(+9)+(-2)$，

$(-9)+(+2)$，$(-9)+0$，$0+(+2)$，$0+0$.

生：$(+4)+(+7)=+11$.

$(+4)+(+7)$是同号两数相加，"和"取"+"号，把$+4$与$+7$的绝对值相加.

(学生逐题口答，从略.)

[这种训练是有理数加法法则的简单应用，通过这组练习，帮助学生熟悉法则. 这里要求学生说明计算的理由，可以促使学生形成"算必有据"的习惯. 学生口述理由时，有的复述法则不准确；比如说明$(+4)+(-7)=-3$的理由时，直接背诵第2条法则，即把

“互为相反数的两个数相加得零”也一并复述出来．这些毛病表明学生在理解、表述数学语言以及思维上存在问题，教学中可及时加以纠正．]

师：通过上面的练习，我们看到：进行有理数加法，先要判断两个加数是同号还是异号，有一个加数是否为零；再根据两个加数符号的具体情况，选用某一条加法法则．进行计算时，通常应该先确定“和”的符号，再计算“和”的绝对值．例如，

计算：(1) $(-3)+(-9)$；　　(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)$.

解：(1) $(-3)+(-9)$（两个加数同号，用加法法则的第1条计算）

$=-(3+9)$（和取负号，把绝对值相加）

$=-12$.

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)$（两个加数异号，用加法法则的第2条计算）

$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ $\left(\left|-\frac{1}{2}\right|>\left|+\frac{1}{3}\right|\right.$，和取负号，把绝对值相减）

$=-\frac{1}{6}$.

注意：解第(2)题时，同学们不能只把注意力集中在计算 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 上，从而把本题的答案写成“$\frac{1}{6}$”．应该根据法则按步思考：先确定“和”取“－”号，再去计算 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 的差．

下面请同学们仿照例题，计算下列各题：（全班学生书面练习，四位同学板演．）

(1) $(+12)+(-8)$；　　(2) $(-42)+(+8)$；

(3) $(+84)+(+36)$；　　(4) $(-35)+(-25)$.

（学生板演正确，从略．）

[这组练习是在"以理驭算"的基础上,引导学生逐步把有理数加法计算过程操作化、程序化,以形成模式,达到熟练.]

师:现在请同学们比较"有理数加法"与小学里学过的数的加法有什么区别和联系?

生甲:小学里学习的加法,加数都不是负数.

生乙:两个有理数相加,先要确定"和"的符号.

师:很好!进行有理数加法运算,先要根据具体情况正确地选用法则,确定"和"的符号,这与小学里数的加法是不同的;而计算"和"的绝对值时,用的是小学里学过的加法或减法运算.

因此,正确地进行有理数加法计算,必须注意两件事:一是判断、确定"和"的符号;二是计算"和"的绝对值.这与同学们在小学里形成的计算习惯是不同的.从现在起,大家要熟悉新的运算法则,形成新的计算习惯.

[这里强调的是一种心理因素——注意.即在进行有理数加法运算时,既要注意数的符号,又要注意绝对值,要逐步形成较强的"注意"的分配能力.初学者常常受旧习惯的影响,只注重"数值"的计算,而忽视符号的判断和确定,纠正这种毛病是正确进行有理数加法计算的重要保证.]

师:请同学们计算下列各式,要求边计算,边思考,有根有据地算出正确的答案:

(1) $(-0.9)+(+1.5)$;　　(2) $(+2.7)+(-3)$;

(3) $(-1.1)+(-2.9)$;　　(4) $(+2.8)+(+3.7)$;

(5) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)$;　　(6) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$;

(7) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$;　　(8) $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$.

(全班学生书面练习,四位学生板演.教师对学生板演进行讲评.)

师：这堂课我们从实例出发，经过比较归纳，得出了有理数加法的法则. 今后我们经常要用类似的思想方法研究其他问题.

应用有理数加法法则进行计算时，要同时注意确定“和”的符号、计算“和”的绝对值两件事.

作业：略.

教案说明

“有理数加法法则”的教学，可以有多种不同的设计方案. 大体上可以分为两类：一类是较快地由教师给出法则，用较多的时间(30分钟以上)组织学生练习，以求熟练地掌握法则；另一类是适当加强归纳法则的过程，从而渗透有关的数学思想方法，相应地适当压缩应用法则的练习，如本教案设计的教学方案.

现在，试比较这两类教案的得失利弊.

第一种方案，教学的重点偏重于让学生通过练习，初步熟练法则的应用，这种教法近期效果较好.

第二种方案，注重引导学生参与探索、归纳有理数加法法则的过程，主动地获取知识. 这样，学生在这堂课上不仅学懂了法则，而且能感知到研究数学问题的一些基本方法(如分类、辨析、归纳与概括、特殊与一般、知识的系统化等). 当然，这种数学思想方法的渗透不可能立即见效，只能是日积月累，期待“瓜熟蒂落”的效果. 但是，基本的数学思想方法被学生掌握以后，便会有很大的迁移作用. 比如，本教案设计的教学过程及其渗透的思想方法，将对“有理数乘法法则”的教学产生明显的正迁移.

这种教法减少了应用法则进行计算的练习，所以学生掌握法则的熟练程度可能稍差，这是教学中应当注意的问题. 但是，在后续的教学中学生将千万次应用“有理数加法法则”进行计算，故这种缺陷是可以得到弥补的. 第一种方案削弱了得出结论的“过程”，

失去了渗透数学思想方法的一次机会．权衡利弊，我主张采用第二种教学方案．

应当指出：数学思想方法的渗透不能仅仅着眼于某一堂课．数学思想方法体现在课本各章节的内容之中，学生对数学思想方法的认识也有一个从模糊到清晰的过程，考虑到学生的个体差异，他们掌握数学思想方法又必然有先有后，参差不齐．因此，渗透数学思想方法的教学，应适当加强导出法则、公式、定理的过程，采用“教者有意，学者无心”的方式进行．要从教学内容的整体出发，有计划、有层次地耐心、反复引导，期待学生认识的飞跃．比如，在“有理数”一章中，可以结合“有理数的概念”、“绝对值”、“有理数的运算”等知识的教学，渗透“分类”的思想方法；可以结合“数轴”的教学，进行数形结合思想的渗透；在“有理数减法法则”的教学中，可以渗透“变换”的思想方法等等．

方　　程

刘伯萱（广东广雅中学）

作 者 简 历



刘伯萱　广东广州市人，1953 年肄业于哈尔滨工业大学机械系，1954 年任广州市 22 中学数学教师. 1984年受广州市人民政府记大功奖励，1986年被评为广东省特级教师、广州市优秀教师，1987 年被评为广东省中学高级教师，1989 年被评为全国优秀教师. 现任广州市中学数学教研会副理事长，广东省广雅中学数学教研组组长.

教 学 目 的

(1) 使学生理解等式的概念及其性质.

(2) 使学生理解方程、方程的解、一元一次方程的根、解方程等概念.

(3) 能根据条件列出简单的方程，会检验一个数是不是某个一元方程的解.

(4) 培养学生观察、分析、综合、抽象等能力，从而发展学生的

思维能力；通过揭示方程中"已知数"和"未知数"的对立统一关系，渗透"对立统一"的辩证思想。

教学过程

一、引入新课

师：让我们来做一个游戏：请同学们想一个数(不要说出来)，把这个数除以2再减去3，然后把运算的得数告诉我，我可以猜出你所想的那个数是几？

请两三位学生分别讲出把一个数除以2再减去3后的结果，教师随即把这个数说出来。

生甲：得数是6.

师：你想的数是18. 验算：

$$\frac{18}{2}-3=6.$$

生乙：得数是0.

师：这个数是6.验算：

$$\frac{6}{2}-3=0.$$

生丙：得数是-7.5.

师：这个数是-9.验算：

$$\frac{-9}{2}-3=-7.5.$$

[从一个游戏引入新课，可以引起学生浓厚的学习兴趣，激发学习一元一次方程的求知欲望，从而调动学生学习的积极性，主动性.]

师：同学们一定很希望知道老师是怎样把你脑子里想的数算出来的. 当你们学习完一元一次方程以后，你不但能像老师一样

迅速算出别人脑子里想的数，而且还能知道为什么可以这样来算.

二、讲解新课

1．等式的概念

师：我是怎样算出同学们所想的数呢？原来我是根据按游戏规定所列出的一个式子：

$$\frac{\text{想定的一个数}}{2}-3=\text{得数}$$

来计算的．同学们脑子里所想的数，是我要求的数，对我来说是一个未知数，用 x 来表示．如果你们告诉我得数是 6，我便可以列出一个式子：

$$\frac{x}{2}-3=6.$$

[这里，使学生初步了解怎样把实际问题抽象成数学问题.]

这是一个用等号连结而成的表示相等关系的式子，叫做等式．例如

$$2+3=5,\ a+b=b+a,\ S=ab,$$

它们都是等式．等式中，等号左右两边的式子，分别简称为等式的左边与右边.

为了求出等式 $\frac{x}{2}-3=6$ 中的 x，我们先来研究等式的性质.

2．等式的性质

师：请同学们看几个例子.

[例 1]　已知 $2+3=5$，我们若在等式的两边都加上同一个数 4，则等式的两边分别是 $2+3+4$ 与 $5+4$，它们有什么关系呢？(要求学生回答是相等的.)所得到的仍是等式．即 $2+3+4=5+4$.

请同学们想一想：在等式的两边都减去，或都乘以，或都除以(除数不能为零)同一个数，结果又怎样呢？(要求学生回答："所得

到的仍是等式.”)

[例2] 填空:

已知: $x=y$, 则

$$x+3____y+3,$$

$$x-\frac{5}{2}____y-\frac{5}{2},$$

$$-2.7x____-2.7y,$$

$$\frac{x}{8}____\frac{y}{8}.$$

(要求学生在空格上填上“=”.)

[引导学生通过观察、练习,指导学生归纳出等式的性质,有利于逐步培养观察、归纳、分析、综合、抽象和概括等能力,让学生初步接触类推和系统化的思维方法.]

师: 从上面的练习,你可以得出什么结论?

(请一名学生回答,并引导学生归纳出等式的性质.)

生: 关于等式,有下面的性质: 等式的两边都加上,或都减去,或都乘以,或都除以(除数不能为零)同一个数,所得到的仍是等式.

3. 方程的概念

师: 我们继续来研究等式. $3+2=5$ 是等式, $3x+2=5$ 也是等式,其中的字母 x 表示未知数.这两个等式有什么不同?

生: 一个含有未知数,一个不含有未知数.

师: 对! 含有未知数的等式叫做方程. $3x+2=5$ 就是一个方程. 下面等式

$$5-2x=1,\ y^2+2=4y-1,\ x-2y=6$$

中的 x、y 都表示未知数,它们也都是方程.

判断下列式子是不是方程,并说明理由:

$$2x+1,\ 2x-1=-3x,\ 5x>1,$$

$$\frac{1}{4}y^2=y+1,\ 10-7=3,\ x+0.2y=8.$$

（以卡片形式出示，让学生逐一回答，其中不是方程的式子，要求改写成方程.）

[例3]　根据下列条件列出方程：

(1) 某数乘以2后减去3，得5.

(2) 某数加上2后乘以3，得12.

解　(1) 设某数是x，那么"x乘以2后减去3，得5"，就可以表示成方程

$$2x-3=5.$$

(2) 设某数是x，那么"x加上2后乘以3，得12"就是

$$3(x+2)=12.$$

师：现在请同学们根据下列条件列出方程：

(1) 某数减去5，得4.

(2) 某数的3倍与2的和等于8.

(3) 某数除以2后减去3，等于-7.5.

（学生练习，教师巡回指导.）

师：对于一个方程来说，不是用所有的数来代替x都能使等式成立的. 例如，在方程$\frac{x}{2}-3=6$中，

当$x=20$时，左边$=\frac{20}{2}-3=7$，右边$=6$，左边$\neq$右边，等式不成立；

当$x=16$时，左边$=\frac{16}{2}-3=5$，右边$=6$，左边$\neq$右边，等式也不成立.

请同学们想想：当x等于什么数值时，能使方程左、右两边的值相等，即等式成立呢？

（让学生猜出$x=18$，并验算：

$$左边=\frac{18}{2}-3=6,\ 右边=6.）$$

∴ 左边＝右边.）

于是，我们说，当未知数 x 的值等于 18 时，方程

$$\frac{x}{2}-3=6$$

左右两边的值相等.

使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解.

例如，$x=18$ 是方程 $\frac{x}{2}-3=6$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解，也叫做根. 例如，也可以说 $x=18$ 是方程 $\frac{x}{2}-3=6$ 的根.

求方程的解的过程，叫做解方程.

[让学生尝试、猜想，有利于培养学生的想象力和独立思考的习惯，可以加深学生对方程的解这个概念的理解.]

师：现在我们可以知道，在游戏中，老师算出同学们脑子所想的数，是利用了解方程的方法. 只要解出方程 $\frac{x}{2}-3=a$ 中的 x（其中 a 是你们告诉我的结果），也就猜出了同学们脑子所想的数，即把你告诉我的结果加上 3，再乘以 2，所得的结果就是你脑子里想的数.

4. 检验方程的解

[例 4] 检验下列各数是不是方程 $2x-3=5$ 的解：

(1) $x=6$; (2) $x=4$.

解 (1) 把 $x=6$ 代入方程，

$$左边=2\times6-3=9,$$
$$右边=5.$$

因为左边≠右边，所以 $x=6$ 不是方程 $2x-3=5$ 的解.

(2) 把 $x=4$ 代入方程，

$$左边=2\times4-3=5,$$

右边＝5.

因为左边＝右边，所以 $x=4$ 是方程 $2x-3=5$ 的解.

[检验方程的解的教学，可以加深学生对方程的解的概念的理解，掌握验根的方法和书写格式，有利于养成学生对解题结果进行检查的良好习惯.]

师：下面请同学们做练习.

1. 检验下列各数是不是方程 $3x-1=2x+1$ 的解.

(1) $x=4$;　　(2) $x=2$.

2. 检验 $x=-9$ 是不是方程 $\frac{x}{2}-3=-7.5$的解.

五、小结、作业

小结和课外作业均略.

教案说明

根据初一学生的年龄与心理特征来确定教学方法，教案开头设计了一个与教学内容紧密联系的游戏引入新课，并环绕着解决游戏提出的问题，引出等式、等式的性质、方程、方程的解和解方程等概念，使学生认识到这些概念不是头脑中凭空产生，而是来源于实践的. 从而激发起学生极大的兴趣，积极地参与教学活动，学得主动，学得生动活泼.

一元一次方程的解法

周继光（上海市卢湾区教育学院）

作　者　简　历



周继光　浙江镇海人，1962年毕业于上海市大同中学，同年留校任数学教师．1978年被晋升为上海市特级教师．1986年在上海师范大学数学系本科毕业．988年被评为上海市中学高级教师，1989年被评为全国优秀教师．现任上海市卢湾区教育学院数学教研员，上海市中小学数学教育研究会理事．

教学目的

以方程的两个同解原理为依据，运用把一元一次方程转化为最简方程的思想方法，使学生掌握解一元一次方程的一般步骤．在训练学生正确、熟练地解一元一次方程的同时，培养他们的观察、思维能力．

教学过程

一、以旧引新，提出问题

1. 复习提问

师：上节课我们学习了比较简单的一元一次方程的解法，先做两道练习：（挂小黑板，出示题目.）

解下列方程：

(1) $2x=6-x$. (2) $0.5x+1=0.2$.

（这两道题是根据学生作业中存在的问题编选的. 学生练习，教师巡视. 发现学生第(1)题都会做，但少数学生缺少解题过程，第(2)题由于解法不同，有两种答案.）

师：第(2)题的两个答案 $x=-\frac{8}{5}$ 与 $x=-1.6$ 都对. 谁来说说解第(2)题的主要步骤和依据.

（两种解法各选一个学生回答，教师根据他们的回答板书.）

生甲：

$$0.5x+1=0.2 \xrightarrow[\text{(同解原理1)}]{\text{移项}} 0.5x=-0.8 \xrightarrow[\text{(同解原理 2)}]{\text{两边除以 0.5}} x=-\frac{8}{5}.$$

生乙：第一步与生甲一样，第二步 $\xrightarrow[\text{(同解原理 2)}]{\text{两边乘以 2}} x=-1.6$.

师：请同学讲一讲解这类方程的思路.

（教师根据学生的回答板书.）

一元一次方程的最简方程 $ax=b(a\neq 0) \xrightarrow[\text{使}x\text{的系数为1}]{} x=\frac{b}{a}$.

2. 提出问题

师：在实际问题中碰到的方程并不都是那么简单，例如：（出示小黑板）(1) 解方程：$5x+2=7x-8$.

(2) 解方程：$2(x-2)-3(4x-1)=9(1-x)$.

(3) 解方程：$\frac{5y-1}{6}=\frac{7}{3}$.

（这三道题分别是课本的例4、例5、例6.）

师：这些比较复杂的一元一次方程怎么解？这是今天我们要学习的．能不能也用“转化”的思想方法求解呢？请同学们先试一试．

[课题引入的方法很多．这里，我采用提出问题的方法引入新课．在复习提问之后紧接着提出问题：比较复杂的一元一次方程能不能也用转化的思想方法求解？这个问题可以使学生产生悬念，激发求知欲．只有学生有了解决问题的要求，调动学生思维的积极性才有可能．事实上这个问题一提出，学生的注意力就被引向正确的思维方向，从而使他们的思维迅速定向．]

二、观察思考，寻求解法

（学生分小组议论，寻求解法．教师参与议论，根据情况作启发、指点．）

师：解这些比较复杂的一元一次方程，可以这样去想：

(1) 只要能把这些方程化成最简方程，就可以求出解来，想想怎样朝着最简方程的目标把方程化繁为简？

(2) 思考时可以把这些方程与最简方程相比较，想想这些方程主要“复杂”在哪里，然后考虑用什么方法把方程化繁为简．

[培养观察力是发展思维的前提和基础．在教学中要抓住一切机会培养学生的观察能力．我认为对于数学模型(图形或式子)要指导学生观察什么和怎样观察．这里我要求学生观察这三个方程与最简方程的区别，把学生的无意观察引向有目的的观察，引导学生边观察、边思考，去寻求怎样把这些比较复杂的方程化为最简方程的方法．]

（学生解题，教师巡视，逐一和学生对答案，当多数学生将要做完第(3)题时，教师发问．）

师：第(3)题是怎样解的？我请三位同学上黑板来解．

生甲：

$$\frac{5y-1}{6}=\frac{7}{3},$$

$$\frac{1}{6}(5y-1)=\frac{7}{3},$$

$$\frac{5}{6}y-\frac{1}{6}=\frac{7}{3}, \quad \cdots$$

生乙：“交叉相乘”得

$$3(5y-1)=6\times 7, \cdots$$

生丙：方程两边都乘以 6，得

$$5y-1=\frac{7}{3}\times 6, \cdots$$

师：这三个同学的解法，谁比较简便？

（学生中间有的认为乙的解法较为简单，有的认为丙的解法较为简单，两种意见，针锋相对.）

师：我们来看乙的解法，“交叉相乘”实际上是在方程两边同乘以几？（学生齐声呼应：18.）那么你们看，乙和丙的解法，哪个更简便一些呢？（学生齐声呼应：丙.）对！丙在两边都乘以方程中各分母的最小公倍数 6，使方程的各项系数都转化成整数，这种“去分母”的方法好！

（教师在学生丙的解答前用红粉笔画一个“✓”，并添上“去分母”三个字.）

今后，我们解含有分母的一元一次方程，一般都先“去分母”.

[第(1)、(2)两题，学生自己能够解决，可简单带过，把重点放在第(3)题的几种不同解法的评析上. 我鼓励学生发表不同意见，开展讨论，并顺着多数学生的思路，稍加点拨，很快使学生信服并接受“去分母”的方法，这要比用注入的方法把“去分母”灌给学生，效果要好. 后者，学生的智力潜能及非智力因素处于静态之中，没有投入教学过程发挥作用；前者，充分重视学生的主体作用，通过教师的鼓励，使学生的智力因素及非智力因素由静态转入动态，有

利于激发学习的内驱力，从而充分调动学生的学习积极性.]

三、小结归纳，整理知识

师：在解上述方程的过程中，我们曾经用过哪几种方法？这些方法的依据是什么？

（根据学生的回答，教师将正确的结论填入下面预先划好的表格中，表中(1)、(3)、(5)三行用红色粉笔书写.）

师：谁再来说说进行上述各个步骤的目的是什么？

（学生回答，教师复述，揭开下表中目的一栏.）

方法	依据	目的
(1) 去分母	同解原理 2	使各项系数转化成整数
(2) 去括号	去括号法则 乘法分配律	有利于移项、合并同类项
(3) 移项	同解原理 1	使含未知数的项和已知项分别集中
(4) 合并同类项	合并同类项法则	减少含有未知数的项
(5) 两边除以未知数的系数	同解原理 2	使未知数的系数转化为 1

师：这里，我们清楚地看到，无论怎样复杂的一元一次方程，利用方程的同解原理经过上述变形[指着表中的第(1)列]都可以化为“最简方程”，然后在方程两边除以未知数的系数把解求出来，这就是解一元一次方程的一般步骤.（板书）

$$\text{“比较复杂的一元一次方程”}\xrightarrow{(1)\sim(4)}\text{最简方程 } ax=b\ (a\neq 0)\xrightarrow{(5)}x=\frac{b}{a}.$$

[处理这部分教材的方法，通常以教会学生掌握解法步骤为重点，而我却紧紧抓住同解原理，让学生以此为依据进行方程的变

形，达到使方程逐步化成 $ax=b$ 型的目标．这样，解法步骤就成为这个过程的自然归纳．这节课着重引导学生探求解法的思路，有利于引导学生动手、动脑去整理自己的思路．学生通过对所学知识内容进行逻辑的分析、综合与分类，归纳整理，不仅能使学生全面地掌握基础知识，而且可以培养学生思维的组织性．]

四、练习评讲，双向反馈

1．巩固性练习与评讲

练习一 解下列方程：

(1) $\frac{y-2}{6}=\frac{y}{3}+1$;

(2) $\frac{2x-1}{3}-\frac{10x+1}{12}=\frac{2x+1}{4}-1$.

[第(2)题是课本的例7，学生在去分母时，对常数1也要乘以公分母这一点容易忽略，为此编选第(1)题．]

（学生练习，教师巡视，进行个别辅导．在多数同学开始做第(2)题时，请一位同学板演第(2)题．）

生：去分母，得

$$8x-4-10x+1=6x+2-12,$$

……

师：（手指着题目）这里1应该乘以12，（指着学生的板演解答）噢！他没有忘记乘．好，看看他解得对不对？

生：不对，$\frac{10x+1}{12}$ 去分母时，分子 $10x+1$ 没有添上括号．

师：（指着板演的学生，面带笑容）你是不是因省略了步骤而搞错的？（面对大家）××同学指出得对，我们要注意防止这类错误，初学时不要省略步骤．这里，如果补上“$4(2x-1)-(10x+1)=3(2x+1)-12$”这一步，就不容易发生错误了．要注意按照解一元

一次方程的一般步骤(指着表格)进行.

2. 思考性练习、讨论与评讲

练习二 解下列方程:

(1) $2(x-1)+5(x-1)=1-8(x-1)$;

(2) $5(y-1)-3(1-y)+7(1-y)=100$.

(解这类方程,一般会有以下两种不同的解法:一种是按"一般步骤"解;另一种是把某一个代数式如题中的 $x-1$、$y-1$ 分别看作未知数 Y、X 来解. 教师有意识地选择两位不同解法的同学上黑板解第(2)题.)

师:(指着两个学生)他们解得对不对?(学生齐声呼应:对!)他的过程怎么这样简单?(指着这个学生)你是怎么想的?

生:我把 $y-1$ 看作是一个未知数,用 X 表示,那么 $1-y$ 就是 $-X$.

师:他的解法好,还有点"创造性"呢!平时他肯动脑筋,所以好的想法就出来了,这种把 $x-1$、$y-1$ 看作是一个未知数 Y、X 的方法叫做"换元法",以后我们会深入学习的. 从上面可以看出,由于方程的形式不同,我们在解方程时,并不一定非要按"一般步骤"来解,也不是每一个步骤一定都要用到,我们要仔细观察,善于抓住方程的特点,选择合理的解法.

3. 小结

师:这一节课我们主要学了哪些知识和方法,谁来小结一下?

生甲:这一节课我们学习了解一元一次方程的一般步骤.

生乙:还学习了每一步的依据.

生丙:还学习了"换元法".

师:同学们小结得很好,我们就要这样,边学习、边归纳整理. 这节课里我们探索、研究了比较复杂的一元一次方程的解法. 基本思路是"转化",(板书带·的词,下同,指着原有的板书.)转化的目标是"最简方程",转化的依据主要是解方程的两个"同解原理",转化

的一般步骤，课本中已有小结.（让学生翻开课本，默读有关的黑体字.）但这不是绝对的，我们要善于观察，认真思考，"因题制宜"，讲究转化的"艺术"，尽量用合理的方法，做到正确、迅速.

[在练习、评讲、小结等教学环节中，形成师生之间和同学之间的"双向反馈"是很重要的. 例如，在学生练习中发现的错误可及时补救，以达到"以新带旧、查漏补缺"的目的. 这样，教师的指导就具有明显的针对性. 又如，在学生小结中，他们只是就事论事地罗列学过的知识和方法，我就从思维的一般方法上加以补充小结，使学生在思想方法上得到熏陶.]

五、因材施教，发展个性

1. 布置作业

在课本中选择三道必做题，一道选做题. 再补充以下两道选做题.

解方程：

(1) $7(2x+1)-3(4x+2)-5\left(x+\frac{1}{2}\right)=1$;

(2) $\frac{1}{3}\left[2(9x+2)-\frac{1}{2}(4+18x)+\frac{2}{3}\right]=1$.

2. 思考题

求二十五个连续整数，使前十五个整数的和等于后十个整数的和.

（留五分钟，让学有余力的同学思考、解答上题，其余学生做作业. 在中、小学衔接教学中，学生已经接触过求连续自然数的和的问题，因此总会有一些学生用下面的方法求出答案，下课前只公布答案，让有兴趣，但尚未求出答案的学生课后再做.

设最小的整数为 x.

$$x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+14)$$
$$=(x+15)+(x+16)+\cdots+(x+24),$$
$$15x+(1+2+\cdots+14)=10x+(15+16+\cdots+24),$$
$$15x+105=10x+195.$$

解得　　　　　　　　$x=18$.

答：这二十五个连续整数是18, 19, 20, …, 42. ）

［由于学生的思维素质存在一定的差异，为了使基础较差的学生"吃得了"，基础较好的学生"吃得饱"，教学要贯彻"因材施教"的原则，为此我在安排教学包括布置作业上都留有余地，使教学有弹性，便于取舍．对基础较差的学生，着重进行思维的基本训练，注意学习习惯的培养，适当降低难度，以提高他们学好数学的信心；而对基础较好的学生，应当适当加大难度，有时还要适当拓宽知识，让学生有思考的余地，提高他们学习数学的兴趣．像上面思考题和选做题这样的题目，我在备课时一般都要编选几道，供学有余力，又有兴趣的同学选做，日积月累，对训练和培养他们的思维素质，发展学生的个性有积极的作用.］

自我评述

我认为学生的学习过程，实际上是他们不断思维的过程，教师应该是这个思维过程的"导演"而不是"演员"．因此，本教案的设计以培养和训练学生的思维素质为宗旨，采用"教师引在前，讲在后；学生想在前，听在后"的教学方法．其主要特点是：

(1) "整章设计，分段疏通"，即重视知识的整体结构，按学生的认识水平，为学生设计单元的最佳学习过程，并在分段实施过程中，当学生感到困惑时，教师给予必要的帮助．这节课在第一阶段(五节课)学生理解、掌握了方程的同解原理和会解简单的一元一次方程(课本的例1～例3)的基础上，着重引导学生运用方程的同解原理去探求解一元一次方程的基本思路，后面安排三节课巩固、消化，帮助学生形成一定的解题技巧．这样安排，一方面使整个单元内容连贯、紧凑、重点突出，另一方面符合学生的认识规律，有"快"、有"慢"，节奏感强，"快"和"慢"得到了辩证的统一．正因为

前面五节课的“慢”(在同解原理与简单的一元一次方程的解法同步穿插进行教学，用了较多的时间，让学生初步接触了“转化”的思想方法)，这节课的“快”才有基础．在学生初步掌握了解一元一次方程的基本思路后，是“精雕细刻”的阶段，用两、三节课，让学生通过积极、主动的思维，“循序前进”(区别于习惯上的“循序渐进”)．

(2) “看、想、记、问、议、练、查、结”，这是学生在教学过程中积极思维的主要活动形式．所谓“优化组合”就是教师根据一节课的教学目标及其在单元学习中的地位，选择若干活动形式，如这一节课以“议”、“练”、“结”为主，针对学生掌握知识的薄弱环节，抓住他们对某个问题的不同意见，组织他们展开讨论．如这节课“去分母”的引入，有时也让一部分学生碰点“钉子”，吃点“苦头”，然后组织他们交流“碰钉子”的体会．通过同学之间的这种信息交流，取长补短，让每个学生的眼、耳、口、手、脑五官齐动．当学生获得了其他同学或教师的信息和思想后，或使他们的思维畅通，或激发起进一步思维的积极性．这样做，有利于最大限度地调动全班各层次学生的思维主动性，切实保证学生在教学双边活动中的主体地位．

(3) “引导、疏通、点拨、激发”，这是教师在教学过程中充分发挥主导作用的主要做法．例如，这一节课一开始教师提出问题，引导学生观察所给方程与“最简方程”的区别，探求解法的基本思路；在学生“去分母”产生错误与小结归纳发生困难时，教师帮助排难解惑，加以疏通；在发现少数学生不按“一般步骤”解时，教师及时加以肯定，并在思想方法上加以点拨，开阔学生的思路，激发他们寻求合理解法的积极性．总之，在教学的双边活动中，只要教师对学生的反馈信息了解广泛，对这些反馈的信息接受敏感，并善于捕捉学生的问题，对反馈信息的质的判断准确，能及时果断地处理它，那么教学效果一定较好．我期望通过教师的“引”，点燃学生思维的火花；通过教师的“疏”，使学生的思维流畅；通过教师的“点”，使学生的思维跨入新的高度；通过教师的“激”，激起学生思维的热

情，使学生的思维处于最佳状态，真正使教师成为学生思维过程的“导演”．同时，教师还应该是学生积极思维的“鼓动者”．教师要抓住学生的心理变化特点，“引”在关键，“疏”在需要，“点”在要害，“激”在心坎．在课堂教学中师生之间的对话与交往，不仅要交流思维方法，还要重视思想与情感的交流．例如，这一节课中，有位学生解题的方法很巧，但讲不清楚，我还是表扬了他，使他感到是一种鼓励．可以这样说，一节课的成功，某种意义上是师生之间交往的成功，是学生的“智力因素”与“非智力因素”同时得到开发的结果．

一元一次方程的应用

赵宪初（上海市南洋模范中学）

作 者 简 历



赵宪初　浙江嘉善人，1928年毕业于交通大学电机系，同年任上海市南洋模范中学数学教师，迄今已六十余年．1963年被评为上海市特级教师，先后从1956年起、1979年起．1984年起任南洋模范中学副校长、校长、名誉校长，现任上海市政协副主席．

教学目的

初步学习怎样列方程解应用题；比较应用题的算术解法和代数解法的异同，初步了解代数解应用题的优越性．

教学过程

一、揭 示 课 题

教师提出课题："一元一次方程的应用"．同时，要求学生把课本翻到第140页*，教师再一次朗读课本标题．

* 本文中的页次均指人民教育出版社中小学数学编辑室编的初级中学课本《代数》第一册的页次．

二、复 习 提 问

为了前后知识的衔接，教师先后提出以下几个问题，学生举手后，教师分别指定学生回答.

(1) 什么叫做方程？

(2) 举一个方程的例子.

(3) 什么叫做一元一次方程？

(4) 什么叫做解方程？

这些问题中，学生的回答可能很完整，也可能有一些回答得不那么完整，甚至不正确. 这时，教师指定其他学生帮助纠正. 对所举的问题教师在肯定以后还要紧扣课本上的定义加以分析，说明为什么这是一个方程. 在每一个"什么叫做……"的问题得到回答以后，还要求全体学生把课本翻到第121、122、124等页，教师带领学生朗读相当于定义的语句. 对于方程的解和解方程要按照课本的叙述加以区别.

三、新 课 讲 解

师：关于什么是方程、什么是一元一次方程、什么叫做解方程、方程的解的意义是什么，我们都复习了一遍，并且逐字逐句地从课本上读到了关于这些概念的叙述. 至于如何解一元一次方程，我们更熟悉一些，因为我们已经解过不少一元一次方程. 关于解一元一次方程，我们以前学的有一个特点，那就是方程都是现成的. 看来对于已经给出一元一次方程的题目，只要求解方程，那是难不倒我们的了.

今天我们要学习的一些问题，是给出有关具体问题的题目，它本身并没有给出方程，而是要我们根据题目给出的条件和要求，自己设定未知数，自己写出方程来，然后解方程求出未知数的值，转而回答所提出的问题. 这就叫做列方程解应用题. 课本第140页

“3.4 一元一次方程的应用”，就是要我们学习根据一些文字叙述的题目，列出方程解应用题.

先看第140页第5行：(指定一个学生读题目.)

一种小麦磨成面粉后，重量要减少15%.为了得到4250斤面粉，需要多少斤小麦？

(教师再带领全班学生用较慢的速度把题目读一遍.)

师：有一点说明：现在我们国家已经规定采用法定计量单位.重量要用千克来计算了，既然课本上仍然用斤，我们就跟着课本用斤来计算.

这是一个用文字写成的题目，我们把这一类题目叫做应用题.这是因为在实际生活中有时是需要应用的.

这个题目没有写出方程，要我们根据题目所给的条件和所提的要求自己列出方程来.

题目给出哪些条件呢？

(教师稍作停顿，让学生思考或议论，但不要求举手回答，仍由教师继续讲解.)

师：这里有两个条件：

(1) 小麦磨成面粉，重量要减少15%；

(2) 要求得到的面粉重量是4250斤.

题目的要求是什么呢？

要求是：需要多少斤小麦.

列方程解应用题，总是要设未知数的，没有未知数，就不成其为方程了.

设什么为未知数呢？

在比较简单的题目里，往往把要求的数量，设为未知数，一般采用字母x来表示.

这里要求的是要多少斤小麦，我们就把“多少”改成x.

(板书：设需要x斤小麦.)

未知数设好以后，第二步就是列方程.

怎样列方程？就是根据题目条件，找出相等的关系.

由题目所给的条件，可以看到两个关系：

(1) 小麦的重量减去失去的重量，等于面粉的重量. 尽管题目没有说出，根据常识我们可以知道这个关系；

(2) 失去的重量是小麦重量的 15%， 这是题目中已点明了的.

小麦失去的重量不知道，但是既然已设了小麦的重量是 x 斤，我们就可以用 x 的代数式来表示失去的重量了.

(板书：失去的重量是 15% x 斤，面粉的重量 4250 斤是已知的.)

现在可以用前述第一种关系写出三种重量之间的一个等式，即列出方程了，那就是：

$$x-15\%x=4250.\quad \text{(板书.)}$$

方程已经列出，以下的任务是解方程了.

(以下教师边口述、边板书.)

等号左边提出 x：$x(1-15\%)=4250$.

两边除以 $(1-15\%)$，得

$$x=4250\div(1-15\%).$$

计算得

$$x=4250\div85\%=4250\times100\div85=5000(\text{斤}).$$

答：需要 5000 斤小麦. (板书完毕.)

我们再把这个解题过程概括一下，请同学们看课本第 140 页最后几行，这里列出了这样几个步骤：

(1) 先用字母(如 x)表示题中的未知数；

(2) 列出需要的代数式(如 $15x\div100$ 或 $15\%\cdot x$)；

(3) 根据题中已知数与未知数的相等关系列出方程；

(4) 解方程，求出未知数的值；

(5) 写出答案(包括单位名称).

(以上由教师读课本.)

注意：答案要针对题目的要求，写成完整的语句. 这叫做有问必有答，而且要答其所问.

可能有的同学会问：这个题目可不可以用算术来解？

当然可以. 在算术里，这个题目叫做百分数应用题，也可以叫做分数应用题.

有没有同学能写出算术解法的算式来？

(学生举手后，由一个学生回答，教师根据学生的回答板书，写在代数解法的右边.)

$$4250\div(1-15\%)=4250\div\frac{85}{100}$$
$$=4250\times100\div85=5000(\text{斤}).$$

答：需要5000斤小麦. (板书完毕.)

这两种解法不但答数一样，实际上算式也是一样的. 我们在解这个方程时，把左边的 $x-15\%\cdot x$ 变形成 $x(1-15\%)$ 而不是像课本上那样计算得 $\frac{85}{100}x$，然后我们在等号两边除以 $1-15\%$，得

$$x=4250\div(1-15\%).$$

(教师指黑板上的方程.)

这叫做"解而不算". 这样，如果抹去左边的"$x=$"，就是算术解法的算式了.

那么算术解法与代数解法哪一种更为优越呢？在比较简单的题目里，两者是差不多的. 但以后遇到比较复杂的问题，算术列式往往比较困难，需要较强的分析思维能力；而代数方法列方程就比较直截了当，只要在解方程中用上面这样的"解而不算"的方法，最后得出的算式，就会和算术经分析思维得出的算式一致，代数的解的过程，实际上就执行了分析思维的任务了. 所以我们说，代数解

法一般比算术解法优越，我们应该学习和熟悉这种列方程解应用题的代数方法.

四、布 置 作 业

第141页例2，自己阅读，读好之后，把解法做在作业本上.再做第142页练习第1～5题.

教案说明

这个教案，是提供给占比例较大的一般学校的老师们参考的(也就是说不是针对一些重点中学中拔尖班级). 现在我们要实行九年制义务教育，估计在大面积范围内，一般学校更多些. 我写这个教案有下列几点想法:

1．要培养学生阅读课本的能力

阅读课本的能力，我们提倡得很久了. 但是在实际教学中，无论是公开教学还是平时教学，对课本阅读的培养，大家似乎还不是都很注意的. 这个教案，就完全根据课本内容，培养学生阅读能力. 阅读课本的习惯的养成，有下列几点好处：一是学生回家后，可以自己读得懂，自己解决可能遗留的疑难；二是教师的讲课尽管语言精练简洁，总不及课本上文字的字斟句酌，明确清楚. 这也有利于学生语文水平的提高.

2．注意巩固性

有不少一般水平的学生，由于自己较少复习，常常随学随忘. 不易巩固. 我认为要改变这个缺陷，应该由我们教师负起责任来，经常把一些重要的概念、公式和方法，在课堂上适当进行复习，温故而知新，有利于接受新知识，有利于前后知识的联系和沟通.

3．教案要有适当的弹性

自从我们在五十年代学习苏联的教育学与教学法以来，比较

强调计划性，一堂课的教学，必须保证完成教案的计划，时间最好不多不少．这样，教师非常紧张．其实，我以为这是值得商榷的．在实际教学中，总可能发生这样或那样的偶发事件，所以教师执行教案，应该有弹性和灵活性．我这个教案，如遇到水平较低，接受上还有困难的班级，可以把关于算术解法那一部分删去．因为在那些学生中，不会产生算术解法反而容易的想法．在学生水平较高的班级，则在这一点上再适当补充一个例题，更可显示代数解法的优越性．我在课本上找不到适当的例子，特意在别的课本上选一个例子如下：

有一个班级的学生去看电影，买了价格为 2 角和 3 角的两种座票共 40 张，总共付了 10 元 4 角，问 2 角票和 3 角票各几张？

这一题的代数解法比较容易．

设 3 角票 x 张，则 2 角票为 $(40-x)$ 张，得方程

$$3x+2(40-x)=104,$$

解方程（解而不算）：

$$3x+2\times40-2x=104,$$

$$(3-2)x=104-2\times40,$$

$x=(104-2\times40)\div(3-2)=24$ （3 角票张数）； $40-x=16$ （2 角票张数）．

答：3 角票 24 张，2 角票 16 张．

如果把最后所得的 $x=(104-2\times40)\div(3-2)$ 抹去“$x=$”，即得

$$(104-2\times40)\div(3-2).$$

这个算式就是算术解法的式子．

其思考的途径如下：

先当 40 张票都是 2 角票，则总价应为 (2×40) 角．

现在实际总价为 104 角，相差数为 $104-2\times40$ 角．

为什么相差呢？因为有 3 角票．

每一张3角票比2角票多花(3-2)角，

因此，3角票张数应为

$$(104-2\times40)\div(3-2)\text{张}.$$

从这个例子，可以看出代数解法比算术解法方便，而实际上式子是一样的.

在算术解法里，我们要有几步分析思考，在代数解法中这些分析思考由解方程代替了. 可以这样说：代数列方程的解法是使我们的分析思考自动化了，这就是代数解法的优越性.

当然，一开始就举这样的例子，可能太早一些. 我认为在下几节课中可以适当插入.

不等式的基本性质

刘宏光（宁夏银川第二中学）

作　者　简　历



刘宏光　广东揭阳人，1956年毕业于北京工业学院机械系，1953年任太原机械制造厂数学力学教师，1986年被授予中学特级教师，1988年被评为宁夏回族自治区中学高级教师．1985年被评为宁夏银川市优秀班主任，1986年获全国五一劳动奖章，并被全国总工会授予全国优秀教育工作者称号．现任宁夏银川二中数学教师，数学教研组组长．

教学目的

掌握不等式的基本性质，会用不等式的基本性质进行不等式的变形．

教学过程

师：我们已学过等式，不等式，现在我们来看两组式子(教师出示小黑板中的两组式子)，请同学们观察，哪些是等式？哪些是不等式？

第一组：　　$1+2=3$；$a+b=b+a$；

　　　　　　$S=ab$；　$4+x=7$.

第二组：　　$-7<-5$；$3+4>1+4$；

　　　　　　$2x\leqslant 6$；$a+2\geqslant 0$；$3\neq 4$.

生：第一组都是等式，第二组都是不等式.

师：那么，什么叫做等式？什么叫做不等式？

生：表示相等关系的式子叫做等式；表示不等关系的式子叫做不等式.

师：在数学中，我们用等号"="来表示相等关系，用不等号"<"、">"或"≠"表示不等关系，其中">"和"<"表示大小关系.表示大小关系的不等式是我们中学数学所要研究的.

前面我们学过了等式，同学们还记得等式的性质吗？

生：等式有这样的性质：等式两边都加上，或都减去，或都乘以，或都除以(除数不为零)同一个数，所得到的仍是等式.

师：很好！当我们开始研究不等式的时候，自然会联想到，是否有与等式相类似的性质，也就是说，如果在不等式的两边都加上，或都减去，或都乘以，或都除以(除数不为零)同一个数，结果将会如何呢？让我们先做一些试验练习.

练习1　(口答)用小于号"<"或大于号">"填空：

(1)　7____4；　　　　(2)　-2____6；

(3)　-3____-2；　　　(4)　-4____-6.

练习2　(口答)分别从练习1中四个不等式出发，进行下面的运算.

(1)　两边都加上(或都减去)5，结果怎样？不等号的方向改变了吗？

(2)　两边都乘以(或都除以)5，结果怎样？不等号的方向改变了吗？

(3)　两边都乘以(或都除以)(-5)，结果怎样？不等号的方向

改变了吗？

生：我们发现：在练习 2 中，第(1)、(2)题的结果是不等号的方向不变；在第(3)题中，结果是不等号的方向改变了！

师：同学们观察得很认真，大家再进一步探讨一下，在什么情况下不等号的方向就会发生改变呢？

生甲：在原不等式的两边都乘以（或除以）一个负数的情况下，不等号的方向要改变。

师：有没有不同的意见？大家都同意他的看法吗？可能还有同学不放心，让我们再做一些试验。

练习 3 （口答）分别在下面四个不等式的两边都乘以（或除以）-2，看看不等号的方向是否改变：

$$7>4;\quad -2<6;\quad -3<-2;\quad -4>-6.$$

师：现在我们可以归纳出不等式的基本性质，一般地说，不等式的基本性质有三条：

性质 1：不等式的两边都加上（或都减去）同一个数，不等号的方向____.（让同学回答.）

性质 2：不等式的两边都乘以（或都除以）同一个正数，不等号的方向____.（让同学回答.）

性质 3：不等式的两边都乘以（或都除以）同一个负数，不等号的方向____.（让同学回答.）

现在请大家翻开课本，一起朗读用黑体字写的三条基本性质.

不等式的这三条基本性质，都可以用数学语言表达出来，先请一位同学说一说第一条基本性质.

生：如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$（或 $a-c<b-c$）；如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$（或 $a-c>b-c$）.

师：对 a 和 b 有什么要求吗？对 c 有什么要求？

生：没有什么要求.

师：哪位同学来回答第二、三条性质？

生甲：如果 $a<b$，且 $c>0$，那么 $ac<bc\left(或\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$；如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc\left(或\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$.

生乙：如果 $a<b$，且 $c<0$，那么 $ac>bc\left(或\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$；如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc\left(或\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$.

师：这两条性质中，对 a、b、c 有什么要求？

生：对 a、b 没什么要求，特别要注意 c 是正数还是负数.

师：很好，c 可以为零吗？

生：c 不能为零. 因为 c 为零时，任何不等式两边都乘以零就变成等式了.

师：好！应用刚才学到的基本性质，我们来看下面的例题.

[例 1] 按照下列条件，写出仍能成立的不等式：

(1) $5<9$，两边都加上 -3；

(2) $9>4$，两边都减去 10；

(3) $-5<3$，两边都乘以 4；

(4) $14>-8$，两边都除以 -2.

解 (1) 根据不等式基本性质1，在不等式 $5<9$ 的两边都加上 -3，不等号的方向不变，所以

$$5+(-3)<9+(-3),$$

即
$$2<6.$$

(2) 根据不等式基本性质 1，得

$$9-10>4-10,$$

即
$$-1>-6.$$

(3) 根据不等式基本性质 2，得

$$-5\times4<3\times4,$$

即
$$-20<12.$$

(4) 根据不等式基本性质 3，得

$$14\div(-2)<(-8)\div(-2),$$

即

$$-7<4.$$

[例 2] 设 $a>b$, 用不等号连结下列各题中的两式:

(1) $a-3$ 与 $b-3$; (2) $2a$ 与 $2b$; (3) $-a$ 与 $-b$.

师: 哪一位同学来做这题?解题时,要讲清每一步的理由.

生甲: 因为 $a>b$, 两边都减去 3, 由不等式的基本性质 1, 得

$$a-3>b-3.$$

师: 很好,大家都是这样做的吗?

生乙: 我是这样做的,因为$a>b$, 两边都加上(-3), 由基本性质 1, 得

$$a-3>b-3.$$

师: 好!这两位同学从不同的角度来分析题目,都得到了正确的结论.

生丙: 因为 $a>b$, $2>0$, 由基本性质 2, 得 $2a>2b$.

生丁: 因为 $a>b$, $-1<0$, 由基本性质 3, 得 $-a<-b$.

师: 下面我们来看一组较复杂的问题,请大家都来开动脑筋,认真审题,仔细分析.

[例 3] 判断以下各题的结论是否正确,并说明理由:

(1) 如果 $a>b$, $c=d$, 那么 $ac>bd$.

(2) 如果 $a>b$, 那么 $ac^2>bc^2$.

(3) 如果 $ac^2>bc^2$, 那么 $a>b$.

(4) 如果 $a>b$, 那么 $a-b>0$.

(5) 如果 $ax<b$, 且 $a\neq0$, 那么 $x<\dfrac{b}{a}$.

(6) $a+b>a$.

生甲: (1)不对,当 $c=d\leqslant0$ 时, $ac>bd$ 不成立.

生乙: (2)也不对,因为 c^2 是一个非负数,当 $c=0$ 时, $ac^2>bc^2$ 不成立.

生丙：(3)对，因为 $ac^2>bc^2$ 成立，则 c^2 一定大于零.根据不等式基本性质2，得出 $a>b$.

(4)对，根据不等式基本性质1，由 $a>b$，两边减去 b 得 $a-b>0$.

(5)不对，当 $a<0$时，根据不等式基本性质3，得 $x>\frac{b}{a}$.

(6)不对，因为当 $b<0$ 时，根据不等式基本性质1，得 $a+b<a$；而当 $b=0$时，则有 $a+b=a$.

师：同学们回答得很好.今天我们学习了不等式的基本性质，我们不仅要理解这三条性质，还要能灵活运用.

课外做以下作业：略.

教案说明

(1) 不等式的基本性质的教学，是分成两个阶段进行的.在初中阶段，对不等式的基本性质，并不作证明，只引导学生用试验的方法，归纳出三条基本性质.通过试验，由特殊到一般，由具体到抽象，这是一种认识事物规律的重要方法. 科学上的许多发现，大多离不开试验和观察.大数学家欧拉说过："数学这门科学，需要观察，也需要试验."通过教学培养学生掌握由试验发现规律的方法，具有重要的意义. 当然通过几个特殊的试验，就得出一般的结论，是不严密的. 但对初中学生来说，初次接触不等式，是不能要求那么严密的.

(2) 不等式的基本性质的教学，还应采用对比的方法.学生已学过等式和等式的性质，为了便于和加深对不等式基本性质的理解，在教学过程中，应将不等式的性质与等式的性质加以比较：强调等式的两边都加上或减去，都乘以或除以（除数不能为零）同一个数，所得到的仍是等式，这个数可以是正数、负数或零；而在不等

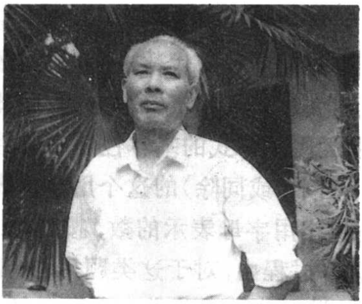
式的两边都加上或减去，都乘以或除以(除数不能为零)同一个数，当这个数是正数、负数或零时，对不等式的方向，有什么不同的影响．通过这样的对比，不但可以复习已学过的等式有关知识，便于引入新课，而且也有利于掌握不等式的基本性质．对比的方法，也是学习数学的一种重要方法．

(3) 在应用不等式的基本性质对不等式进行变形时，学生对不等式两边是具体数，判定大小关系比较容易．因为这实际上是有理数大小的比较．对于不等式两边是含字母的代数式时，根据题给的条件，运用不等式基本性质判别大小关系或不等号方向，就比较困难．因为它比较抽象，特别是在运用不等式的基本性质2和性质3时，学生必须考虑不等式两边同乘(或同除)的这个用字母表示的数的符号是什么，或者还要对这个用字母表示的数，按正数、负数或零三种情况加以讨论．在教学过程中，对于这类题目，采用讨论法是比较好的．因为在讨论时，学生可以充分发表各种见解．对于正确的见解，教师可以让学生说出解题的依据；对于错误的见解，教师可以进行启发引导，发动学生自己找出错误的原因，自己修正见解．这样，有利于发现问题，有的放矢地解决问题，有利于深化对不等式基本性质的认识．

二元一次方程组练习

刘世策（湖北省华中师大一附中）

作 者 简 历



刘世策 湖南攸县人，1951年毕业于中原大学教育学院，同年担任华中师大第一附中数学教师. 1964年在职进修毕业于华中师大业大数学系本科. 1987年被评为中学高级教师，1989年被评为中学特级教师，同年被评为全国优秀教师，现任华中师大一附中教育科学研究室主任.

教学目的

(1) 通过练习，加深学生对二元一次方程的解、二元一次方程组的解的概念的理解.

(2) 学会根据题意列方程组，求方程(组)中的待定系数.

(3) 复习二元一次方程组的两种基本解法.

教学过程

一、简 略 复 习

师：我们已初步学过二元一次方程和二元一次方程组的

概念、二元一次方程组的两种基本解法以及列一次方程组解应用问题等知识. 现在,我提几个最基本的概念问题,请同学们回答. 回答之前,可以先温习一下课本.

问题 1 什么叫做二元一次方程?

问题 2 什么叫做二元一次方程的一个解? 它和一元一次方程的解有什么不同?

生: ……(基本上按课文回答. 问题 2 的后半部分回答得不准确.)

师: 所谓二元一次方程的一个解, 是指适合一个二元一次方程的一对未知数的值. 我们叫"一对", 是因为这两个未知数的值有互相依存的关系, 也就是说,"一对"未知数的值具有相关性. 二元一次方程的解是成对出现的, 一元一次方程的解一般是一个值, 这便是它们的根本区别之一. 其次, 二元一次方程一般都有无数多个解. 也就是说二元一次方程的解又具有不确定性, 而一元一次方程的解一般只有一个. 这便是它们的第二个不同之处.

下面, 同学们再回答两个问题:

问题 3 什么叫做二元一次方程组的解?

问题 4 方程组

$$\begin{cases} ax+by=c, & ① \\ a'x+b'y=c' & ② \end{cases}$$

的解是不是方程 ① 或方程 ② 的一个解? 可不可以说方程 ① 或方程 ② 的解是这个方程组的解?

(学生回答问题 3 不成问题, 回答问题 4 的后半部分有些不准确.)

师: 既然每个二元一次方程有无数多个解, 方程组的解是组成方程组的各个方程的公共解, 那么, 问题 4 中方程组的解就必然是方程 ① 的无数多个解中的某一个, 也是方程 ② 的无数多个解中的某一个. 所以说, 方程组的解必是方程 ①(或 ②)的一个解. 但反

过来说，方程 ① 或 ② 的解究竟是不是方程组的解，这就不能笼统地说是或不是. 因为方程 ① 或 ② 的解有无数多个，它们组成二元一次方程的一个解集. 我们通常说的某二元一次方程的解是指它的解集中的任何一个，因此不能说每个方程的解集中的任何一个是方程组的解. 但如果指的是每个二元一次方程的某一个解，那么这个解可能是方程组的解. 例如，我们不能说方程 $x+y=10$ 的解集是方程组 $\begin{cases}x+y=10,\\x-y=6\end{cases}$ 的解，但方程 $x+y=10$ 的解集中的一个解 $\begin{cases}x=8,\\y=2\end{cases}$ 却是方程组 $\begin{cases}x+y=10,\\x-y=6\end{cases}$ 的解.

一般说，一元一次方程的解是唯一的. 次数不变，未知数增加(到二元或二元以上)，方程的解就不定. 但几个多元一次方程组成的一次方程组，当方程的个数与未知数个数相同(如两个二元一次方程组成二元一次方程组)时，如果有解，解一般只有一个. 这一个解实际上是一组相关联的数(其个数等于元数)，它是组成方程组的每个方程的解集的公共部分.

这种关于一次方程和一次方程组解的概念，虽然是初步的，却是我们解方程组的基础.

下面，我们以这些概念为指导，做练习.

二、做 练 习

练习 1 以 x、y 为未知数的方程组

$$\text{I}\begin{cases}ax-by=4,\\ax+by=2\end{cases}\quad 与 \quad \text{II}\begin{cases}2x+3y=4,\\4x+5y=6\end{cases}$$

的解相同. 试求 a、b 的值.

[教师巡视学生做题的情况(大多数学生都能正确地完成)，然后提问.]

师：为什么可以先求出方程组 II 的解 $\left(\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}\right)$，再将这个解代入方程组 I 求 a、b 的值？

生：因为方程组I与方程组 II 的解相同，而方程组 II 的系数全是数字，很容易求解，所以可以先求出方程组 II 的解，再代入方程组 I：这个解$\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$一定会满足方程组 I 中的每个方程.

师：为么什将$\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$一代入方程组I，就可以确定 a 和 b 的值呢？

生：因为将$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$代入方程组 I后，方程组I就变成了以$a$、$b$ 为未知数的方程组$\begin{cases}-a-2b=4,\\-a+2b=2,\end{cases}$可求出 a、b 的值.

师：为什么方程组$\begin{cases}-a-2b=4,\\-a+2b=2\end{cases}$能确定 a、b 的值？

生：因为方程组$\begin{cases}-a-2b=4,\\-a+2b=2\end{cases}$是二元一次方程组，它有唯一的一个解：$\begin{cases}a=-3,\\b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

师：假如我们把原题改成："方程组$\begin{cases}2x+3y=4,\\4x+5y=6\end{cases}$的解是方程 $ax-by=4$ 的解，求 a、b 的值."怎么样？

生：（思考一下后回答）不可能求出 a、b 一对确定的值，因为将方程组的解$\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$代入方程 $ax-by=4$ 后，得到的只是一个关于 a、b 的二元一次方程：$-a-2b=4$，它的解是不定的（或有无数多个）.

师：但是，我们能不能把这个题目的结论改一下，改成可求的呢？

生：（思考一会儿，个别优等生回答）把最后一句话改成“试求a、b之间的关系式”。

师：对．因为一个关于a、b的二元一次方程$-a-2b=4$的解虽然是无数个，但a、b的值却不是任意的，而必须受到$-a-2b=4$的制约，所以可以叫做a、b的关系式．

还要指出一点，这题中的方程和方程组仍是以x、y为未知数，a、b只不过是待我们确定的系数，称为待定系数．当然，在具体确定待定系数a、b的值时，我们根据题意组成了以a、b为未知数的方程（组）．在数学和物理、化学中，我们常常根据题意，列出以我们想求的字母为未知数的方程（组）．这就是代数列方程知识的灵活应用．

师：下面，同学们再做一个趣味性的题．仔细想想每一步过程和它的理由．

练习 2　甲、乙两人解同一个二元一次方程组．甲正确地得出解为$\begin{cases}x=3,\\y=-2,\end{cases}$乙因把这个方程组中第二个方程$x$的系数抄错了，得到一个错误的解为$\begin{cases}x=-2,\\y=2.\end{cases}$他们解完之后，原方程组的三个系数被污染而看不清楚，变成下面的形式：$\begin{cases}\square x+\square y=2,\\\square x-7y=8.\end{cases}$请你把被污染的原方程组的三个正确的系数找出来．

（让学生审清题意后，教师提示：我们要求三个被污染的系数，实际上就是刚才说的求三个待定系数．我们可以把原方程组写为

$$\begin{cases}ax+by=2,\\cx-7y=8,\end{cases}$$ 再考虑怎么去求a、b、c的值．

老师巡视同学们做题情况．发现大多数同学把甲的正确

解$\begin{cases}x=3,\\y=-2\end{cases}$代入方程组，得$\begin{cases}3a-2b=2,\\3c+14=8,\end{cases}$很快求出 $c=-2$. 但如何求 a、b 的值呢？许多同学有点困惑，因为这里已有一个关于 a、b 的二元一次方程：$3a-2b=2$，根据二元一次方程解的不定性，单凭这一个方程不能确定 a、b 的值．但怎样再找出一个关于 a、b 的二元一次方程呢？能不能将乙的错误的解$\begin{cases}x=-2,\\y=2\end{cases}$也代入方程组，得 $-2a+2b=2$ 与 $3a-2b=2$ 组成方程组来求 a、b 的值呢？大多数同学在这一点上犹豫不决．经观察，只有极少数人"敢于"这样做，他们得到方程组

$\begin{cases}3a-2b=2,\\-2a+2b=2,\end{cases}$解之，$\begin{cases}a=4,\\b=5.\end{cases}$最后答案是 $a=4$, $b=5$, $c=-2$.

[这时，教师让这极少数人把他们的做法公布出来(叫一个学生板演出来)，提出问题让大家思考.]

师：这种做法对吗？

(少数学生说不对，多数学生因犹豫而不表态，极少数学生坚持说对.)

师：认为不对的同学讲讲为什么不对？

生(认为不对的)：乙的解答根本错了，不能代入原方程组去求 a、b.

(坚持认为对的极少数学生在下面小声说："可以代".)

师：请认为"可以代"的同学讲讲理由.

生(认为"可以代"的)：因为乙抄错的是方程组里第二个方程的一个系数，而第一个方程 $ax+by=2$，他是没有抄错的，所以将他求得的解$\begin{cases}x=-2,\\y=2\end{cases}$代入方程 $ax+by=2$ 是适合的.

师：但乙的解$\begin{cases}x=-2,\\y=2\end{cases}$是错误的，既然是错误的，怎么能适

合方程 $ax+by=2$ 呢?

(短时间的沉默后,教师继续指点.)

师:说到这里,请大家注意两个问题:一是乙的错误的解是怎么产生的?二是什么叫二元一次方程组的解,它和方程组里每一个方程的解集是怎样的关系?

我们知道,乙的错误的解 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2\end{cases}$ 不是计算错误,而是抄错一个系数引起的,也就是说 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2\end{cases}$ 对于乙所抄错的方程组 $\begin{cases}ax+by=2,\\ c'x-7y=8\end{cases}$ (其中 c' 是乙所错抄的那个系数)仍然是正确的,什么叫正确呢?就是说 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2\end{cases}$ 是方程 $ax+by=2$ 的解集与方程 $c'x-7y=8$ 的解集的公共部分. 当然 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2\end{cases}$ 也是方程 $ax+by=2$ 的一个解,而 $ax+by=2$ 的解有无数多个,这无数多个就包括甲的正确解 $\begin{cases}x=3,\\ y=-2,\end{cases}$ 也包括乙的错误的解 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2.\end{cases}$ 换句话说, $\begin{cases}x=3,\\ y=-2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2\end{cases}$ 都是方程 $ax+by=2$ 的一个解,因此将它们分别代入 $ax+by=2$ 是应该能使等式成立的. 这样代进去后得出来的就是关于 a、b 的二元一次方程组. 解这个方程组,就得到 a、b 的值. 请所有同学按此法做出结果来.

(教师巡视所有学生的解题过程,个别答疑,特别对差生,究竟采用什么方法解关于 a、b 的方程组 $\begin{cases}3a-2b=2,\\ -2a+2b=2\end{cases}$ 都要作指导,直到大家都求出 $a=4$, $b=5$, $c=-2$ 后,教师再提出进一步的要求.)

师:现在,我们把求出来的 a、b、c 的值代入原来设的方程组

$\begin{cases}ax+by=2,\\cx-7y=8,\end{cases}$ 看看正确的原方程组究竟是怎样的，然后检验一下甲的解 $\begin{cases}x=3,\\y=-2\end{cases}$ 究竟是不是原方程组的正确解. 还看一看乙把第二个方程中 x 的系数究竟抄成了什么.(将 $\begin{cases}x=-2,\\y=2\end{cases}$ 代入 $c'x-7y=8$, 得出抄错了的 c' 为 -11, 如有个别学生对此不领会，还要加以个别辅导).

师：(总结)本题的关键在于正确地理解乙的错误的解对他所抄错的方程组仍是正确的解. 同时要深刻地理解每一个二元一次方程的解有无数多个，而每一个二元一次方程组的解是组成方程组的两个二元一次方程的解集的公共的一个解. 因此方程组的解必是组成方程组的每一个方程的一个解. 反过来，组成方程组的每一个方程的解(无数多个)却不一定都是方程组的解(其中只有一个是).

这既是本题的关键，也是整个二元一次方程组这一章的最基本的概念. 同学们必须通过一些题目深刻地理解这些概念，并灵活地加以运用.

除此以外，二元一次方程组还有一些值得进一步探讨的问题，例如，什么时候有一解？什么时候无解或有无数多个解？以后再研究. 关于三元或三元以上的一次方程组，其解的概念跟二元是类似的. 解法上也是代入法和加减法两种基本方法. 当然有时有些技巧，同学们可以自己去钻研一下.

三、布 置 作 业

课本习题(略).

补充题：

1. k 等于什么数值时，下列三个二元一次方程有公共解？

$$3x-y-7=0,\quad 2x+3y-1=0,\quad y=kx-9.$$

2. 不解方程组 $\begin{cases}3x-2y=5,\\ x+3y=6,\end{cases}$ 证明它的解必是方程 $3x-2y-5+\lambda(x+3y-6)=0$ 的解，也必是方程 $\lambda(3x-2y-5)+(x+3y-6)=0$的解.（$\lambda$ 是任意有理数）

教案说明

(1) 数学中的练习课，既带有小单元复习性质，又带有相对集中地培养某方面技能的任务. 因此，练习课上的例题和习题不应简单地重复已学过的内容，但也不是全新的内容. 应以新一点的形式加深刚学过的某些知识为宜.

本课是基于以下的认识拟定的：学生对二元一次方程组的基本解法，虽然还有待熟练，但一般都能掌握，除个别学生需要辅导（这还是要考虑到的，本教案也有所体现）外，不需过多的重复. 真正的难点还在于对二元一次方程解的不定性以及它和二元一次方程组的解的关系等概念的理解上. 因为初一的学生长期接触的是一元一次方程，那里的解一般是唯一的. 可是一接触二元一次方程，解就变成无数个，这里的一个解实际上是一对数，这成对的数虽说是无数多，却不是随意的. 最后，二元一次方程组的解是两个二元一次方程解集的“交”. 这些概念，比起一元一次方程来说，要复杂和“深奥”得多，对初学者来说是不容易理解的，但为今后的学习考虑，还是要逐步加深对这些概念的理解，所以本练习课选择了这方面的内容. 为了使形式不完全雷同于已学过的题型，选择了以求待定系数（还不是研究待定系数法）和某些趣题的形式出现的例题，这可引起学生的学习兴趣（这也是练习课要注意的一环）. 练习1最后作一点“修改”再问学生，一方面是加深对二元一次方程的解的不定性的理解；另一方面是通过变动题目的条件，培养学生

的求异思维能力．这是数学的培养任务之一．

(2) 练习课既要以学生的活动为主，又要体现教师的主导作用．这种主导作用主要体现在选材和启发性的提问、提示这两个方面．对低年级学生，尤其要注意交替使用练习、问答、议论、讲解等各种方法，不要满堂讲，也不要满堂练，提示的主要目的是帮助学生审清题意，提问的主要目的是通过师生问答形式揭示本课最核心的内容，以引起全体学生注意．本课的设计力图做到这一点．

(3) 练习课仍应突出重点．本课主要是解决对“解”的理解，解方程(组)、列方程组都是次要的环节，虽要照顾，但不是重点．

(4) 练习课如何体现因材施教，仍是值得探索的问题．本课的问题1～问题4，练习1的前半部分是对所有学生的要求，练习1的后半部分（即求 a、b 的值）虽然也是对全体学生的要求，但不是要求所有学生都能独立完成，只是极少数学生能这样做，然后通过问答让全体学生理解即可．对于差的学生，还要估计到他们对基本解法不太熟练，要进行个别辅导，作业中的补充题可以免做．

平方差公式

张传慈　(山东青岛第二中学)

作　者　简　历



张传慈　山东日照市人，1959年肄业于山东农学院林学系．1960年任青岛第二中学数学教师．1987年被评为山东省数学高级教师，1988年获山东省教学改革先进教师称号．现任青岛二中数学教师．

教学目的

(1) 通过平方差公式的引出，培养学生分析、综合和抽象；概括的能力．

(2) 使学生掌握平方差公式的形式、特点，学会正确运用这个公式，提高学生的运算能力．

教学过程

师：我们已经学过了多项式的乘法，两个二项式相乘，在合并同类项前应该有几项？

生：四项．

师：合并同类项以后，积可能会是三项式吗？请举出例子.

生：
$$(x+3)(x-2)=x^2+x-6,$$
$$(3x+2y)(x-y)=3x^2-xy-2y^2 \quad 等等.$$

师：两个二项式相乘，积可能是二项式吗？

（问题由教师提出，让学生动脑、动笔进行探讨．学生议论纷纷，各谈自己的见解，教师根据学生提出的一些问题，引导学生进行分析.）

生：
$$(x+3)(x-3)=x^2+3x-3x-9=x^2-9,$$
$$(2m+n)(2m-n)=4m^2+2mn-2mn-n^2=4m^2-n^2,$$
$$(3a^2-5b)(3a^2+5b)=9a^4-15a\ b+15a^2b-25b^2=9a^4-25b^2.$$

师：从上面例子可以看出，两个二项式相乘，积可能是二项式．那么，乘式具备什么特征时，积才会是二项式呢？

生甲：两个因式的两项中，分别有一项相同，而另一项是互为相反数，积一定是二项式.

生乙：当乘式是两个数之和以及这两个数之差相乘时，积是二项式.

师：两位同学回答都很正确．他们从不同角度分析了乘式特征，用两数和及这两数差表达乘式的特征既简单又确切．我们再看一下，为什么具备以上特点的两个二项式相乘，积会是两项呢？

生：具备这样特点的两个二项式相乘，积的四项中，会出现互为相反数的两项，合并这两项的结果为零，于是就剩下两项了.

师：很好，观察认真，理由正确．我们再观察一下，它们的积有什么特征？

生：积等于乘式中这两个数的平方差.

师：很好，特别是用了“这两个数”四个字实在太好了．这说明他观察得很仔细，表述也很贴切.

在多项式的乘法中，对于某些特殊形式的多项式相乘，我们把它们写成公式，并加以熟记，以便遇到类似形式的多项式相乘时，

就可直接运用有关公式进行计算．如果用 a 和 b 表示两个数，那么两个数的和与这两个数的差的积，就可以写成公式．你能将公式写出来吗？

生：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$．

师：非常正确，这就是今天我们要学习的平方差公式．

（教师板书课题：平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$．）

师：哪位同学能用语言叙述一下平方差公式？

生：两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差．

师：同学们要注意这两个数四个字，它表示构成和的两个数与构成差的两个数，以及相乘后构成平方差的两个数，应该是相同的两个数．不然就会出问题．今后对于形如两数和与这两数差相乘的乘法，就可直接运用平方差公式来计算．如 $(1+2x)(1-2x)$，你就可以很快计算出结果，谁来计算一下？

生：$(1+2x)(1-2x)=1-4x^2$．

师：这题符合平方差公式特征吗？

生：符合，两因式中，有相同数是 1 与 $2x$，所以它是 1 与 $2x$ 的和，乘以 1 与 $2x$ 的差，积是 1 的平方与 $2x$ 的平方差．

师：非常好，你应用了 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 这个公式．你能说出在本题中 a、b 分别表示什么吗？

生：a 表示 1，b 表示 $2x$．

师：很好！思路很清楚．计算下列两题：

(1) $(3m+2n)(3m-2n)$．

(2) $(b^2+2a^3)(2a^3-b\ )$．

生：(1) $(3m+2n)(3m-2n)$

$$=(3m)^2-(2n)^2=9m^2-4n^2.$$

(2) $(b^2+2a^3)(2a^3-b\ )=(2a^3+b\ )(2a^2-b^2)$

$$=(2a^3)^2-(b\ )^2=4a^6-b^4.$$

师：第(2)题，他将 b^2+2a^3 表示为 $2a^3+b^2$，就可直接应用公

式，说明他思路很灵活．那么能否用平方差公式计算下式吗？

(3) $(-4a-1)(-4a+1)$，请大家在练习本上计算．

（教师巡视学生解题情况，让采用不同解法的两个学生进行板演．）

生甲：解：$(-4a-1)(-4a+1)=[-(4a+1)][-(4a-1)]$

$=(4a+1)(4a-1)=(4a)^2-1^2=16a^2-1.$

生乙：解：$(-4a-1)(-4a+1)=(-4a)^2-1^2=16a^2-1.$

师：两位同学解题都很正确．生甲先用了提出负号的办法，使两乘式首项变成正的，而后他看出两数的和与这两数的差相乘的形式，应用平方差公式，写出结果．生乙把 $-4a$ 看成一个数，把 1 看成另一个数，直接写出 $(-4a)^2-1^2$ 后得出结果，说明他看问题比较注意平方差公式的特征，能看到问题的本质，运算简捷．因此，我们在计算中，先要分析题目中的数字特征，然后正确应用平方差公式，就能比较简捷地解出答案．请同学们口答下列各题：

(1) $(-a+b)(a+b)$；

(2) $(a-b)(b+a)$；

(3) $(-a-b)(-a+b)$；

(4) $(a-b)(-a-b)$．

生甲：(1) $(-a+b)(a+b)=b^2-a^2$.

生乙：(2) $(a-b)(b+a)=a^2-b^2$.

生丙：(3) $(-a-b)(-a+b)=(-a)^2-b^2=a^2-b^2$.

生丁：(4) $(a-b)(-a-b)=(-b)^2-a^2=b -a^2$.

师：同学们掌握了公式特点，正确地运用公式计算，很好．请同学们在练习本上做下列各题：

(1) $(4x-5y)(4x+5y)$；

(2) $(-2x^2+5)(-2x^2-5)$；

(3) $\left(\frac{2}{3}x-7y\right)\left(\frac{2}{3}x+7y\right)$；

(4) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)\left(-\frac{1}{2}x-2y\right)$.

（教师巡视学生练习情况，请不同解法的学生，或发生错误的学生板演，教师和学生一起分析解法，然后教师进行总结.）

师：下列各题的运算是否正确？若不正确，请纠正：

(1) $(-2x-1)(2x-1)=(-2x)^2-1=4x-1$;

(2) $(1+4a)(1-4a)=1-4a^2$;

(3) $(a-2b)(2a+b)=(2a)^2-(2b)^2=4a^2-4b^2$.

生：(1)的运算不对，结果应该是 $1-4x^2$. 因为

$$(-2x-1)(2x-1)=[(-1)-2x][(-1)+2x]$$
$$=(-1)^2-(-2x)^2=1-4x^2.$$

师：纠正得很对，他纠正了忽视公式结构的错误. 同学们看，经他纠正后

$$\begin{array}{ccccc} [(-1)+2x] & [(-1)-2x] & = & (-1)^2 & - (2x)^2=1-4x^2. \\ \downarrow \quad \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ (a \;+\; b) & (a \;-\; b) & = & a^2 & - \quad b^2 \end{array}$$

题目就符合公式的结构，从而也就能正确地得出结果.

生：(2)的运算也不对. 这道题中相当于公式中 a 和 b 分别是 1 和 $4a$，所以结果应是

$$(1+4a)(1-4a)=1-(4a)^2=1-16a^2.$$

生：(3)的运算也不对，这道题不是求两数之和与这两数之差的积，所以不能用平方差公式.

师：那么该怎么做呢？

生：用多项式乘法去做.

师：同学们回答得很正确. 说明已掌握了平方差公式的结构特征，并能正确运用它.

四、布置作业

略.

教案说明

(1) 将“两个二项式相乘，积可能有几项”的问题作为课题引入，目的是激发学生的学习兴趣，使学生能在两个二项式相乘其积可能为四项、三项、两项中找出积为两项的特征，上升到一定的理论认识，加以实践检验，从而培养学生观察、概括的能力.

(2) 通过学生自己的试算、观察、发现、总结、归纳，得出为什么有的两个二项式相乘，其积为两项，因为其中两项是两个数的平方差，而另两项恰是互为相反数，合并同类项时为零，即

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

这样得出平方差公式，且把这类乘法的实质讲清楚了.

(3) 通过练习与小结，教会学生如何正确应用平方差公式.这里特别要求学生注意公式的结构，用对应方式来加强对公式结构的理解和训练. 如计算 $(-2x-1)(2x-1)$,

$$\begin{array}{l}(-2x-1)(2x-1) =\!=\!=\!=\!=\!=\!= (-1)^2-(2x)^2=1-4x^2.\\ \quad\downarrow\quad\ \ \downarrow\quad\ \ \downarrow\ \ \downarrow\qquad\qquad\qquad\quad\ \uparrow\qquad\quad\ \uparrow\\ (-b+\ a)\ \ (b+a)=(a-b)(a+b)=a^2\quad-\quad b^2\end{array}$$

这样，学生就能正确应用公式进行计算，不容易出差错.

另外，在计算中不一定用一种模式刻板地应用公式，可以结合以前学过的运算法则，经过变形后灵活应用公式，培养学生解题的灵活性. 例如，计算 $(-2x-1)(2x-1)$，可适当交换位置后，再套用公式，即

$$(-2x-1)(2x-1)=[(-1)-2x][(-1)+2x];$$

也可提取负号后，再套用公式，即

$$(-2x-1)(2x-1)=-[(2x+1)(2x-1)].$$

因式分解综合练习

唐盛昌（上海市上海中学）

作　者　简　历



唐盛昌　浙江镇海人，1962年毕业于上海师范学院数学系，同年任上海市晋元中学数学教师．1987年被评为上海市中学高级教师，1990年被授予上海市特级教师的称号．曾多次获得上海市教育科研成果等第奖．1985年被授予"上海市优秀教育工作者"称号，1986年获上海市文汇园丁奖．现任上海中学数学教师、校长，徐汇区政协常委，上海市普通教育科学研究学术委员会委员．

教学目的

通过运用转化思想分解因式的练习，培养学生综合运用因式分解四种基本方法的解题能力．

教学过程

师： 我们已经学习了因式分解的哪几种基本方法？

生： 提公因式法、公式法、十字相乘法和分组分解法．

师：不错！对于一个具体的问题，我们往往不能一下子判断出应该选用哪一种方法，或应该综合运用哪几种方法来加以解决．由于不存在一种万能的妙法，因此我们就需要探索出关于多项式因式分解的一般思路，以帮助我们有效地解决因式分解的问题．下面我们先看一个具体的例题：

[例 1] 把下列各式分解因式：

(1) A^2-3A+2； (2) x^6-3x^3+2.

（教师巡视，待学生练习完成后，教师提问.）

师：对于(1)，绝大多数同学应用十字相乘法，得到了正确的答案．下面请同学讲讲在解(2)时用了哪几种分解因式的基本方法？

生：从 x^6-3x^3+2 分解为 $(x^3-1)(x^3-2)$ 用了十字相乘法，从 $(x^3-1)(x^3-2)$ 分解为 $(x-1)(x^2+x+1)(x^3-2)$ 用了公式法.

师：在整个分解过程中，关键的是哪一步？

生：第一步．只要把 x^3 看作 A，(2)就转化成了(1)，继续分解就容易了.

师：很好！你把要解决的问题，转化成了我们所熟悉的问题，这种"转化"的思想方法在因式分解中是十分重要的．下面请同学们做例2.

[例 2] 把下列各式分解因式：

(1) $(a+1)^2-3(a+1)+2$；

(2) $x^3y+2xy^3-3x^2y^2$；

(3) $(2x-y)^2-3(2x-y)(2y-x)+2(2y-x)^2$.

（学生练习，教师巡视指导，大部分学生获得正确答案.）

师：同学们处理这几道因式分解题时，采用了怎样的思路啊？

生甲：对于例 2(1)，只要把 $a+1$ 看作 A，就可转化为例 1(1).

生乙：对于例 2(2)，在提取公因式 xy 后，可分解为 $xy(x^2-3xy+2y)$，而括号内的部分，可转化为与例 1(1)相类似的形式，用

十字相乘法可得

$$x^3y+2xy^3-3x^2y^2=xy(x-y)(x-2y).$$

生丙：对于例 2(3)，只要把 $2x-y$ 看成A，$2y-x$ 看成B，即可转化为与例 1(1) 相类似的形式，然后运用十字相乘法把它分解为 $3(x-y)(4x-5y)$.

师：同学们在解题时，不但运用了转化的思想，而且发现了实现这种转化的手段，如提取公因式，把代数式中的某一项，或项中的某一部分看作一个整体（即换元）加以处理的方法等等．确实，在因式分解中，实现这种转化的手段是多种多样的．我们再来研究例 3.

［例 **3**］ 把下式分解因式：

$$(x^2+x)(x^2+x-3)+2.$$

（学生练习，教师巡视并请能正确解答的一个同学，和采取把 $(x^2+x)(x^2+x-3)$ 相乘开来做的一个同学板演，然后提问正确解答的同学.）

生：$(x^2+x)(x^2+x-3)+2=(x^2+x)^2-3(x^2+x)+2$

$$=(x^2+x-2)(x^2+x-1)=(x-1)(x+2)(x^2+x-1).$$

师：请把你为什么这样做的理由跟同学们说一下.

生：只要把 x^2+x 看成一个整体就可以把问题转化为与例 1(1) 相类似的形式 $(x^2+x)^2-3(x^2+x)+2$，再分解就不难了.

师：对！以恰当的形式进行式的变形，是实现转化的又一个常用的重要手段．而把 $(x^2+x)(x^2+x-3)$ 按多项式乘法展开的做法，反而掩盖了刚才说到的题中项之间的内在联系，也就难以获得正确答案，因而这种变形是不足取的.

［例 **4**］ $x(x+1)(x-2)(x-3)+2.$

（教师巡视，请已获正确解题途径的学生板演.）

生：$x(x+1)(x-2)(x-3)+2=(x^2-2x)(x^2-2x-3)+2$

$$=(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)+2=(x^2-2x-1)(x^2-2x-2).$$

师：你为什么把 x 与 $(x-2)$ 相乘，$(x+1)$ 与 $(x-3)$ 相乘呢？

生：$x(x-2)=x^2-2x$，$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$. 它们的二次项与一次项系数都相同，原式成为 $(x^2-2x)(x^2-2x-3)+2$，这样可转化为与例 3 相类似的问题.

师：我们把 $x(x+1)(x-2)(x-3)+2$ 与 A^2-3A+2 比较一下，粗略看来，两者的形式是完全不同的. 但在转化思想的指导下，通过式的变形，可以把前者转化为与后者相类似的形式来加以分解. 再回顾一下刚才做过的那些例题，同学们已经发现，它们的形式虽各有差异，但却都可以转化为 A^2-3A+2 或与它相类似的问题加以解决. 因此这是一组形式相异、实质类同的问题. 对于这种形异实同的问题，我们要提高识别能力，学会运用各种必要的手段来进行转化，化繁为简，化难为易，从而正确地进行因式分解. 下面，我们再来看一组这样的问题.

[例 5] 把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-y^2$；

(2) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$；

(3) $4(a-b)^{n+1}-(a+b)^2(a-b)^{n-1}$；

（学生练习，教师巡视，发现学生都能得到正确答案.）

师：同学们做得很好，我再出三道难度稍大一些的问题，看同学们能不能攻下来.

（学生情绪高涨.）

[例 6] 把下列各式分解因式：

(1) $4y^2-(x^2+4)-4x$；

(2) $x(x-4y)+4(y+z)(y-z)$；

(3) 证明两个奇数的平方差能被 8 整除.

（请三位程度中等的学生板演.）

生甲：(1) 原式 $=4y^2-(x^2+4x+4)$

$$=4y^2-(x+2)^2=(2y+x+2)(2y-x-2).$$

生乙：(2) 原式$=x^2-4xy+4y^2-4z^2$

$$=(x-2y)^2-4z^2=(x-2y+2z)(x-2y-2z).$$

生丙：(3) 设两个奇数为$2n-1$、$2n+1$，则

$$(2n+1)^2-(2n-1)^2=(2n+1+2n-1)(2n+1-2n+1)$$
$$=8n.$$

故它能被8整除.

师：例6(1)、(2)两题，同学们都把它转化为可用平方差公式加以解决的问题，这是很恰当的. 同学们认为例6(3)的证法对不对？

(大部分学生认为证法正确，但有学生提出异议.)

生：我认为这种证法不对. 设两个奇数为$2n+1$、$2n-1$，这就等于说它们是两个连续的奇数. 但题目并没有说这两个奇数必须是连续的. 因此应该设这两个奇数为$2n+1$与$2m+1$.

师：说得很好. 如果题目指的是两个连续奇数，那么黑板上的证法是正确的. 但现在题目没有"连续奇数"这个条件，因此上述证明是有问题的. 你能说一说你的证法吗？

生：$(2n+1)^2-(2m+1)^2=(2n+1+2m+1)(2n+1-2m-1)$

$$=4(n+m+1)(n-m).$$

这说明它能被4整除.(这时答不下去了.)

师：如果命题正确的话，应该怎样呢？

生：$(n+m+1)(n-m)$应该被2整除.

(大家议论，如何证明$(n+m+1)(n-m)$能被2整除.)

师：可以研究一下n和m的奇偶性.

生：如果n和m奇偶性相同的话，$n-m$必是偶数，命题得证；如果n和m一个为奇数，一个为偶数，则$n+m+1$为偶数，命题也成立.

师：对！这题告诉我们，同学们在解题时，除了方法正确以外，还需要有灵活的思路，方能把新旧知识融会贯通. 刚才我们处理的

两道例题，转化的方向是十分明确的．例 1～例 5 是转化为二次三项式 A^2-3A+2，例 6 是转化为平方差公式 x^2-y^2． 但在一般情况下，转化的方向却不一定是那么明显的． 这就要求我们根据问题的特点，从给出多项式的项数、次数、系数等各个方面进行分析，以探索出正确的转化方向．

[例 7] 把下列各式分解因式：

(1) $3a^{n+}b^{n-2}-24a^{n-1}b^{n+1}$；

(2) $a^2(a+1)-b(ab+a)$；

(3) $(2x-y+3)(2x-y+1)-15$．

（请学生分组讨论、练习，然后得出结论．）

生甲：(1) 通过提取公因式，转化为立方差公式加以解决．

原式$=3a^{n-1}b^{n-}(a^3-8b^3)=3a^{n-1}b^{n-2}(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$．

生乙：(2) 运用多项式乘法，转化为四项式，再用分组分解法解．

$$\text{原式}=a^3+a^2-ab^2-ab=a(a^2-b^2)+a(a-b)$$
$$=a(a-b)(a+b+1).$$

生丙：(3) 把 $2x-y+1$（或 $2x-y,\cdots$）看成一个整体，转化为二次三项式，用十字相乘法解．

设 $2x-y+1=a$，

$$\text{原式}=(a+2)a-15=a^2+2a-15$$
$$=(a+5)(a-3)=(2x-y+6)(2x-y-2).$$

或设 $2x-y=b$，

$$\text{原式}=(b+3)(b+1)-15=b^2+4b-12$$
$$=(b+6)(b-2)=(2x-y+6)(2x-y-2).$$

师：我们来看最后一道题目．

[例 8] 把 x^6-y^6 分解因式．

（教师请学得较差的学生回答．）

生甲：原式$=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$$=(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4).$$

师：生甲分别将x^2、y^2看作A、B，并运用立方差公式及平方差公式分解因式，这样的思路是不成问题的．演算的结果怎么样？

生：$x^4+x^2y^2+y^4$还可分解因式，即

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y\ ).$$

因此，

$$x^6-y^6=(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2).$$

师：这说明上述解法是可行的，但不简便．大家思考一下，是否有简便解法？

生：有！

$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

师：这种解法确是简便的．它只是简单地运用熟知公式，而且避开了上一种解法中难于甚至错误判断$x^4+x^2y^2+y^4$能否分解因式的问题．但这两种解法有共同之处：都运用转化思想及平方差公式与立方差公式，而后（前）者把x^3、y^3（x^2、y^2）分别看作A、B，就决定了这两解法的优劣．这就告诉我们：当某题有多种解法时，就要善于判断并选择较优解法．

这一节课，我们学习了运用转化思想解因式分解问题．要使转化思想在处理因式分解问题时获得成功，需要注意三个要素：转化的方向清楚；转化的手段有效；因式分解的基本功扎实．运用转化思想处理因式分解，只是众多思路中的一种，它不是唯一的，也不是万能的．另外，这种转化思想还可用来处理其他一些数学问题，在以后的学习中我们还会遇到．

布置作业：略．

教案说明

(1) 本节课的教学重点放在发展学生的能力上. 一是通过介绍"转化"这种一般的数学方法在分解因式上的应用, 加深学生对数学方法的理解, 提高学生处理数学问题的能力; 二是通过一般数学方法(转化)与特殊数学方法(因式分解的四种基本方法)的结合, 提高学生综合使用各种因式分解方法的熟练程度. 当他们面临新的情景时,单靠常用的"提"(公因式)、"套"(公式)、"分"(分组分解)已不能解决时, 可以有一种探索的思路与策略来加以处理,从而提高学生分析问题与解决问题的能力.

(2) 在内容安排方面,贯彻了步步深入的原则:提出转化思想(例 1)——实现转化的手段(例 2～例 6)——探索转化的方向(例 7)——转化思想的简单评价. 在安排上还注意了由简到繁, 由易到难(例 1～例 6)与由繁到简、由难到易(例 7)的结合. 在方法上注意了把握好教师指导程度与学生独立活动程度两者的分寸. 随着课的深入,学生独立活动的程度在逐渐增加.

(3) 上述内容是在重点中学中进行教学的. 如果班级学生程度较低, 可放慢进度或减少题量(如删去例 7), 但要求"运用转化思想,训练学生综合运用因式分解的四种基本方法的解题能力"不宜降低.

分式的基本性质

赵大悌（北京市海淀区教师进修学校）

作者简历



赵大悌　山东乐陵人，1962年毕业于北京师范学院数学系，先在北京师院附中任教15年，1977年至今在北京海淀区教师进修学校数学组任教研组长．1988年、1991年分别被评为中学高级教师、北京市特级教师．1985年被评为北京市普教系统先进工作者，1986年被选为北京市数学会常务理事．

教学目的

使学生掌握分式的基本性质，初步体会类比等方法的运用，并注意培养学生分析问题的能力．

教学过程

一、复习提问

师： 什么叫分式？

生： 如果 A、B 表示两个整式，B 中含有字母，那么，表示

$A \div B$ 的式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式.

师：回答得很好．你能举一个分式的例子吗？

生：例如 $\frac{2}{x}$ 就是一个分式.

师：好！这位同学不仅记住了定义的条文，而且理解了定义的条文．下面，请同学再注意听第二个问题："两个整式的商就是分式."这种说法对吗？为什么？

生：不对！例如，$\frac{a}{2}$ 是两个整式的商，但却不是分式．所以，上述说法不对.

师：这个同学回答得也很好．他的回答，在两个方面对我们有所启发：首先，学习定义要注意抓住要点．以分式为例，应该抓住：① A、B 是整式；② B 中含有字母；③ $\frac{A}{B}$ 表示 $A \div B$ 所得的商；④ $B \neq 0$．用这几点去衡量"两个整式的商就是分式"的说法，显然这种说法是不对的．其次，要否定一个结论，只需举出一个反例就可以了.

[指出这一点，是想在初一代数的教学中加强逻辑思维的训练，以分散初二几何入门时的难点.]

二、新 课 教 学

师：这节课我们学习"分式的基本性质"．请同学们继续思考并回答我的问题.

从外形上看，分式 $\frac{A}{B}$ 和过去学过的什么知识相类似？

生：与分数相类似.

师：对！其实，从内容上考虑，分式与分数也很类似．因为，A、B 都是整式，而整式是由字母和数用运算符号连结而成，进而

字母又表示数，所以，归根结底 A、B 都表示数．因而，$\frac{A}{B}$ 仍表示两个数相除，即它仍是一个分数．只是由于 A、B 可以表示不同的数，使得 $\frac{A}{B}$ 可以表示不同的分数而已．

[对"字母表示数"的认识是极其重要的．这里，既为引入新课搭桥，又有意识地巩固对"字母表示数"的认识．]

好！我们已经认识到分式与分数相类似．基于这一认识，我们应该如何去研究分式？

生：通过与分数比较来研究分式．

师：对！顺便指出一点，像上面这样，根据两类事物在某些方面的相同而猜测其他方面也可能相同的方法称为"类比"．这是一种很有用的方法．

[这样处理的用意在于，引导学生自己去预见．因为预见本身就包含着创造．同时，还想有意加强方法的教学，以逐步提高学生的观点和能力．]

师：请同学们再考虑：

$\frac{3}{4}$ 与 $\frac{15}{20}$ 相等吗？为什么？

$\frac{9}{24}$ 与 $\frac{3}{8}$ 相等吗？为什么？

生：它们分别相等．这是根据分数的基本性质："分数的分子与分母都乘以（或除以）同一个不等于零的数，分数的值不变"得出的．

师：那么，通过类比，我们可以猜想分式的基本性质是什么？

（停顿后，教师自答．）

分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个不为零的整式，分式的值不变．

用公式表示是

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\ \frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}.$$

（其中 M 是不等于零的整式）

三、巩固练习

师：下面我们做些练习，看看大家对这一性质掌握得怎样？

练习之前，请大家和我一起回忆一下以往学习公式的经验：首先，要认识到公式中的字母是可以变化的；其次，在解题时，对于已经变化了的式子，要能看出“无非还是它”（指公式中的字母）.

请大家先做第一组练习.

练习一（口答）：

(1) $\frac{ax}{ay}=\frac{ax\div a}{ay\div a}=\frac{?}{?}\ (a\neq 0)$;

(2) $\frac{-5}{3-a}=\frac{-5\times(-1)}{(3-a)\times(-1)}=\frac{?}{?}$.

练习后，教师指出：

(1)中，A 变成了 ax，B 变成了 ay，M 变成了 a. (1)式表达的无非是 $\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$. 类似地，(2)式表述的无非是 $\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$.

[这是两个比教材中的例 1 起点更低的题目. 放在此处的用意是直接加深对公式结构的认识，体会字母 A、B、M 变化的情况. 教学中，应注意知识基本结构的教学，不宜过早地把繁杂的题目端给学生，以免喧宾夺主，让复杂的题目外形或次要的解题技巧淹没了对基础知识的理解.]

请大家做第二组练习.

练习二（口答）：

找出 $\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$ 中的M.

(1) $\frac{a}{2b}=\frac{ac}{2bc}(c\neq 0)$;

(2) $\frac{x^3}{xy}=\frac{x^2}{y}$.

(教师追问：如果 M 给得很复杂，不容易看出来，能不能通过运算求出来？)

生：因为 $AM\div A=M$，所以可以通过等号右边的分子除以等号左边的分子而得到 M.

[这两题是教材中的例1．它实际涉及到分式基本性质的逆应用：知道了相等关系，去追究 M 是什么．若将它放在练习一，似乎跳跃稍大，故我铺垫了练习一.]

师：请同学再做第三组练习.

练习三：

先找出 M，再确定 AM 或 BM.

(1) $\frac{A}{B}=\frac{?}{BC}$;

(2) $\frac{a+b}{ab}=\frac{?}{a^2b}$;

(3) $\frac{x^2+xy}{x^2}=\frac{x+y}{?}$.

[这里的(2)、(3)是教材中的例2，增加(1)是为了强调问题的基本结构，并为(2)、(3)设置一层台阶，以有利于学生独立地沿阶而上去做出后面较难的题目.]

师：最后我们来做练习四，看谁做得又快又好.

练习四：

不改变分式的值，把下列各式的分子和分母中各项的系数都化为整数：

(1) $\dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y}$;

(2) $\frac{0.3a+0.7b}{0.2a-b}$.

[这是教材中的例3．它要求学生根据题目特点，自己确定 M 的值，显然难度高了一层.]

四、小　　结

师：这节课讲了什么？

生：讲了分式的基本性质.

师：分式的基本性质的文字叙述和公式表达分别是什么？

生：略.

师：除此之外，通过与分数比较而认识分式的类比方法也是值得学习和注意的一个方面.

[本节课中，提醒学生重视公式中的字母可以变化，强调公式的结构，注意解题过程的剖析.但小结中，仅谈了“类比”一项，意在有所重有所轻，突出一点，印象更深.]

五、作　　业

读本节的教材，并预习后面的分式的符号法则.

课本习题：略.

思考题：

通过与分数类比，预想一下，分式基本性质的主要用途.

教案说明

这节课的具体设计思想，已在“教学过程”中作了说明．下面再说明几点：

(1) 总的希望之一是处理好知识与能力的关系．一方面，要落实基础知识；另一方面，要通过讲结构、讲方法(如类比)、讲预见、讲过程(如剖析解题过程)等，以培养学生能力.

(2) 希望之二是处理好教师与学生的关系．一方面，教师是主导，通盘设计了这节课的程序；另一方面，又采用“起点低，步子小，一条线”的方法处理教材，采用启发式、谈话法的教学方法，让

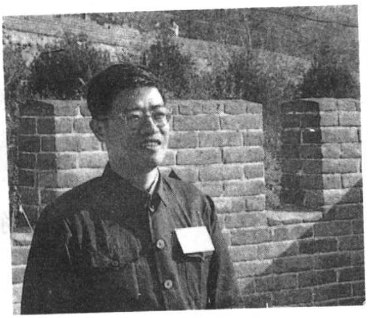
学生尽量处于主动学习的状态中.

(3) 分式的符号法则与分式基本性质包含于同一小节的教材中,考虑到突出重点、分散难点,我们认为分成两堂课讲授更科学、更合理.因此,这堂课只讲了分式的基本性质这部分知识.

算术平方根的概念

赵家镐（上海市位育中学）

作 者 简 历



赵家镐　浙江嘉善人，1961年毕业于上海师范学院（现名上海师范大学）数学系，同年任上海市五十一中学（现名位育中学）数学教师．1988年被评为上海市中学高级教师，1990年被评为上海市中学特级教师．1981年、1983年两次被评为上海市劳动模范，1986年被评为全国教育系统劳动模范．现任上海市位育中学校长、数学教师．

教 学 目 的

使学生掌握平方根的概念，算术平方根的概念，算术平方根的表示法．

教 学 过 程

一、平方根概念的引进

1．复习平方运算

［例 1］ 已知正方形边长为 3 cm，求正方形面积.

解 设正方形面积为 S，则

$$S=3^2=9(\text{cm}^2).$$

［例 2］ 已知圆的半径为 5 cm，求圆的面积.

解 设圆的面积为 S，则

$$S=\pi\cdot 5^2=25\pi(\text{cm}^2).$$

［例 3］ 已知公式 $h=4.9a^2$，求 $a=2$ 时 h 的值.

解 $h=4.9\times 2^2=19.6$.

在上述例题中都要进行这样一种计算：已知一个数求这个数的平方．我们已经知道，这种运算称为乘方运算．这个已知数称为底，运算的结果称为底的二次幂，乘方的次数称为指数，用式子来表示是：$a^2=b$.

其中 a 称为底，a 右上角表示乘方次数的“2”称为指数，b 称为 a 的二次幂.

2．引进平方根概念

实际问题中，也有与上述相反的问题.

［例 4］ 要剪出一块面积为 9 dm² 的正方形钢板，问钢板边长应是多少？

解 设正方形钢板边长为 x，依题意有

$$x^2=9,$$

求出满足 $x^2=9$ 的 x 值，就可得正方形钢板的边长.

因 $3^2=9$，$(-3)^2=9$，故满足 $x^2=9$ 的 x 的值可以是 3，也可以是 -3，但正方形边长只能取正值．所以 $x=3$.

答：正方形钢板的边长为 3 dm.

［例 5］ 已知圆的面积是 16π cm²，求圆的半径长.

解 设圆的半径为 R，依题意有

$$\pi R^2=16\pi, \quad 即 \quad R^2=16,$$

求出满足 $R^2=16$ 的 R 的值即可求出圆的半径.

因 $4^2=16$, $(-4)^2=16$, 故满足 $R^2=16$ 的 R 的值为 4 或 -4, 但圆的半径只能取正值. 所以 $R=4$.

答: 圆的半径为 4 cm.

[例 6] 已知公式 $h=4.9a^2$, 求 $h=19.6$ 时 a 的值.

解 由 $h=4.9a^2$, $h=19.6$, 得

$$19.6=4.9a^2, \quad 即 \quad a^2=4.$$

因 $2^2=4$, $(-2)^2=4$, 故满足 $a^2=4$ 的 a 的值为 2 或 -2, 所以 $a=2$ 或 $a=-2$.

撇开刚才三例的具体意义, 数学上都是要解决这样一个共同的问题: 已知某数的平方, 要求这个数. 用式子来表示就是如果 $x^2=a$, 求 x 的值. 这和我们一开始提出的问题: 求一个数的平方正好是相反. 要解决这样一个问题, 在数学上就要引进一个新的概念——一个数的平方根.

定义一 如果一个数的平方等于 a, 这个数称为 a 的平方根 (也叫 a 的二次方根).

例如: $2^2=4$, 2 称为 4 的平方根; $(-2)^2=4$, -2 称为 4 的平方根. $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$ 称为 $\frac{4}{9}$ 的平方根; $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $-\frac{2}{3}$ 称为 $\frac{4}{9}$ 的平方根.

$0^2=0$, 0 称为 0 的平方根(第一个零是作为底的零, 第二个零是作为幂的零).

$a^2=a^2$, a 称为 a^2 的平方根; $(-a)^2=a^2$, $-a$ 称为 a^2 的平方根.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $a+b$ 称为 $a\ +2ab+b^2$ 的平方根.

3. 求一个数的平方根

[例 7] 求 16 的平方根.

分析: 什么叫求 16 的平方根? 根据平方根的定义, 就是要求一个数 x. 使 x 的平方等于 16. 即求满足 $x^2=16$ 的 x 的数值. 因为 $4\ =16$, $(-4)\ =16$, 故满足 $x^2=16$ 的 x 的数值是 4 或 -4. 所

以，16 的平方根是 4 和 -4.

[例 8] 求下列各数的平方根：

(1) $\frac{9}{25}$；(2) 0.0144；(3) 0；(4) y^2；(5) $a^2-2ab+b^2$；(6) -9.

仿照例 7 的分析，要求这些数的平方根就是要求满足

$$x^2=\frac{9}{25};\ x^2=0.0144;\ x^2=0;\ x^2=y^2;$$

$$x^2=a^2-2ab+b^2;\ x^2=-9$$

的 x 的数值. 满足这些等式的 x 的值分别是

$$x=\pm\frac{3}{5};\ x=\pm 0.12;\ x=0;\ x=\pm y;\ x=\pm(a-b).$$

所以，$\frac{9}{25}$ 的平方根是 $\frac{3}{5}$ 或 $-\frac{3}{5}$；0.0144 的平方根是 0.12 和 -0.12；0 的平方根是 0；y^2 的平方根是 y 和 $-y$；$a^2-2ab+b$ 的平方根是 $a-b$ 和 $b-a$.

在我们学习过的数的范围内，不存在这样的 x 的值满足 $x^2=-9$，这时说 -9 没有平方根.

我们把求一个数的平方根的运算叫做开平方.

4. 简单小结

(1) 满足 $x^2=a$ 的 x 的值称为 a 的平方根；

(2) 正数 a 的平方根有两个，它们的绝对值相等，符号相反，即它们互为相反数，零的平方根是零；

(3) 在我们学习的数的范围内，负数没有平方根；

(4) 平方和开平方互为逆运算.

二、算术平方根的概念

1. 算术平方根概念的引进

我们已经知道，正数的平方根有两个，它们互为相反数，但实

际问题中，有时只要求出正的平方根．譬如前面例4、例5中实际上是要求出9和16的正的平方根．为了突出正数的正的平方根，我们引进算术平方根的概念．

定义二 正数a的正的平方根，称为a的算术平方根．例如，16的平方根有两个：4和-4，4是16的正的平方根，所以4是16的算术平方根．

$\frac{9}{64}$的平方根有两个：$\frac{3}{8}$和$-\frac{3}{8}$，$\frac{3}{8}$是$\frac{9}{64}$的正的平方根，所以$\frac{3}{8}$是$\frac{9}{64}$的算术平方根．

2．求正数的算术平方根

[**例9**] 求0.25的算术平方根．

解 0.25的平方根有两个：0.5和-0.5，0.5是0.25的正的平方根，所以0.25的算术平方根是0.5．

[**例10**] (1) 当$a>0$时，求a^2的算术平方根；(2) 当$a<0$时，求a^2的算术平方根．

解 当$a\neq0$时，a^2的平方根有两个a和$-a$．当$a>0$时，a是a^2的正的平方根．所以，$a>0$时，a是a^2的算术平方根．当$a<0$时，$-a$为正数，$-a$是a^2的正的平方根．所以$a<0$时，$-a$是a^2的算术平方根．这里同学们要特别注意：$+a$不一定是正数；$-a$不一定是负数．

根据算术平方根的概念，要求正数a的算术平方根，只要求使$x^2=a$成立的x的正值．

零的平方根只有一个，就是零．对此我们规定零的平方根也叫做零的算术平方根．这样，不只是可以讨论正数的算术平方根．也可以讨论零的算术平方根．当$a\geqslant0$时，a的算术平方根的概念可以统一为：非负数a的非负的平方根，称为非负数a的算术平方根．

3. 简单小结

(1) 非负数 a 的非负的平方根，称为非负数 a 的算术平方根；

(2) 求 a 的算术平方根只要求使 $x^2=a$ 成立的 x 的非负值；

(3) a 的算术平方根的值一定是非负的.

三、表示算术平方根的符号

求一个数 a 的算术平方根是数学上经常遇到的，规定非负数 a 的算术平方根用符号 $\sqrt{a}$ 表示，读作根号 a，其中 a 称为被开方数. 这样，16 的算术平方根只要用符号 $\sqrt{16}$ 就能表示.

$\frac{81}{121}$ 的算术平方根用 $\sqrt{\frac{81}{121}}$ 表示；$\sqrt{10000}$ 表示 10000 的算术平方根. 因而 $\sqrt{\frac{81}{121}}=\frac{9}{11}$；$\sqrt{10000}=100$.

[例 11] 求下列各式的值：

$$\sqrt{144};\quad \sqrt{\frac{25}{144}};\quad \sqrt{0.81};\quad \sqrt{0}.$$

解 $\sqrt{144}=12$；$\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{5}{12}$；$\sqrt{0.81}=0.9$；$\sqrt{0}=0$.

[例 12] $a>0$、$a<0$ 时，求 $\sqrt{a}$.

解 $a>0$ 时，$\sqrt{a}=a$；$a<0$ 时，$\sqrt{a}=-a$.

注意 $\sqrt{a}$ 只表示 a 的算术平方根. 如何用符号表示 a 的平方根呢？因为正数 a 的平方根有两个值，它们互为相反数，既然 $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，那么 a 的负平方根一定是 a 的算术平方根的相反数，从而可以用 $-\sqrt{a}$ 表示. 所以 a 的平方根就可以用 $\pm\sqrt{a}$ 表示.

[例 13] 求 7 的平方根.

解 因 7 的算术平方根是 $\sqrt{7}$，故 7 的平方根是 $\pm\sqrt{7}$（$\pm\sqrt{7}$ 这类数，待以后研讨）.

[例 14] 求满足 $x^2=a(a>0)$ 的 x 的值.

解 根据平方根定义，满足$x^2=a$的x的值，就是a的平方根. 所以，$x=\pm\sqrt{a}$.

如果$a=0$，因为0的算术平方根就是0的平方根，所以0的平方根就用$\sqrt{0}$表示，因为$\sqrt{0}$和$-\sqrt{0}$是一样的. 所以，当$a\geqslant0$时，a的平方根都可以统一用$\pm\sqrt{a}$表示.

简单总结:

(1) 满足$x^2=a(a\geqslant0)$的x叫做a的平方根. a的平方根可以用$\pm\sqrt{a}$表示;

(2) 非负数a的非负的平方根称为a的算术平方根，a的算术平方根用$\sqrt{a}$表示;

(3) 当$a\geqslant0$时，有$\sqrt{a}\geqslant0$.

布置课外作业(略).

教案说明

(1) 算术平方根概念是初中代数的难点. 这一节课采取层层剥笋，逐步深入，适当分散难点的教学方法，将整节内容分为三段(三个台阶)：①从实际问题引出平方根概念，然后经过反复操练使学生掌握平方根概念及根据乘方运算的结果求平方根；②从两个平方根的区别上引出算术平方根的概念，并经过反复操练要求学生熟练掌握算术平方根的概念；③用数学符号表示算术平方根，又从两个平方根的联系上找出用算术平方根的符号表示平方根的方法，并经过反复操练使学生熟练掌握这一表示方法. 教学时采取每跨一台阶有一段操练时间，以便使学生从领会至掌握到熟练. 每两台阶之间跨度较小、坡度较缓，使全班绝大部分学生都能在不知不觉中跨过每一台阶并到达顶端，这是设计这一节课的主要思想.

(2) 从实际问题的需要出发，引进平方根、算术平方根概念，

体现从实际到理论、具体到抽象这样一个一般的认识过程，从而起到培养学生辩证唯物主义观点的作用.

(3) 这一节课从求二次幂的平方运算引出求平方根的运算，突出了平方运算和开平方运算的互逆性. 从平方根概念引出算术平方根概念，突出了两个概念的区别和联系，这样做虽容量较大，但从概念的完整性来看是必要的.

(4) 应扣住定义去思考问题，这是数学上一种重要的思想方法. 而学生往往重视解题技巧，忽视这种较为朴素的思想方法的训练. 这一节课在这方面有较高的要求和较多的训练. 如根据平方根定义去求平方根；根据算术平方根的概念求算术平方根；根据表示算术平方根的符号规定去表示算术平方根和平方根. 老师要求学生回答问题时一定要追根问底，这个底就是平方根、算术平方根和表示算术平方根的符号这几个最基本的概念.

(5) 以旧引新，以新带旧是上好数学课的一条重要原则. 这一节课在这方面作了一些考虑，从旧知识引进新知识，讲新知识时尽可能复习一些旧知识，同时，还为以后的教学设下一些伏笔，为以后教学分散一些难点. 如对例 10 的处理. 这在实践中是可行的.

二 次 根 式

陈淑卿（辽宁丹东市第五中学）

作 者 简 历



陈淑卿　辽宁凤城人，1949年毕业于辽东省立中学，同年起先后任丹东市孤山中学、第五中学数学教师、数学教研组长. 1987年被评为辽宁省中学高级教师. 1984年获丹东市劳动模范称号，1985年获辽宁省劳动模范称号. 现已离休，兼任丹东市数学奥林匹克学校教练员.

教学目的

(1) 使学生了解二次根式的意义，掌握二次根式的两个公式:

$$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0),\ \sqrt{a^2}=\begin{cases}a(a>0);\\0(a=0);\\-a(a<0).\end{cases}$$

(2) 能灵活运用二次根式的概念与公式解决有关问题.

(3) 通过本节课的学习，培养学生积极思维和独立解决有关问题的能力与自学能力.

教学过程

师：同学们，这节课我们研究二次根式.（教师板书课题.）

一、指导阅读

师：下面我提出两个问题，请同学们带着这两个问题去看书.

阅读提纲 （板书.）

(1) 怎样理解二次根式的意义？$\sqrt{-5}$、$\sqrt{a}$($a<0$)是不是二次根式？为什么？

(2) 符号"$\sqrt{\ }$"表示什么？a 一定是正数吗？为什么当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$？

（教师深入学习小组指导阅读，学生看书思考、议论，时间约 6 分钟.）

[在指导阅读的过程中，教师根据学生的实际情况，精选出两个关键性问题，引导学生阅读本节课的基础知识，即二次根式概念与两个主要公式. 一开始就让学生抓住本节课的主要内容，教给学生学习方法，培养学生探取新知识的思维品质.]

二、质(设)疑讨论

师：看书后，同学们有什么问题？请提出来.

生：书上是用式子$\sqrt{a}$($a\geqslant0$)来表示二次根式的，可不可以这样说，一个非负数的算术平方根叫做二次根式？

师：这个问题提得很好，谁还有问题？

生：$-\sqrt{a}$($a\geqslant0$)是不是二次根式？

师：这个问题提得也很好，谁还有问题？

生：书上提到："在本章里，如果没有特别说明，所有字母都表示正数."既然这样规定，为什么还要研究式子当 $a<0$ 时，$\sqrt{a}=$

$-a$ 呢？规定了 a 是正数，那么式子$\sqrt{a}=a$只存在这一种情况了.

师：你对问题想得很深，提出的问题也很关键．我们共同来研究.

（教师把学生提出的问题，作扼要的归纳并板书.）

师：同学们看书很认真，提出了本节课要解决的关键问题，如果这些问题都搞清楚了，那么本节课的主要问题也就解决了．下面请同学们围绕我在阅读提纲中提的两个问题以及同学们所提出的问题在小组里进行讨论.

（教师再次深入学习小组，学生争论、看书、研究．时间约10分钟.）

[在质(设)疑讨论中，引导学生在认真读书的基础上，大胆地提出问题，是启迪和培养学生积极思维和探究能力的有效手段.由于各层次的学生从不同角度提出问题，有助于教师了解学生在学习新知识的过程中存在的主要问题，为下一步启发引伸打下基础.在小组讨论中，各抒己见，学生的表述能力得到了提高，思维得到了锻炼.]

三、启发引伸

师：请同学们对所讨论的问题发表个人意见.

生甲：我认为书上是非常准确而明了地用式子$\sqrt{a}(a\geqslant0)$来定义二次根式的，把二次根式说成是一个非负数的算术平方根是不确切的，就像$-\sqrt{a}(a\geqslant0)$它不是 a 的算术平方根，但它却是二次根式.

生乙：我认为一个非负数的算术平方根叫做二次根式这种说法正确，因为式子$\sqrt{a}(a\geqslant0)$中的 a 就是一个非负数，而符号"$\sqrt{\ }$"就表示 a 的算术平方根，非常确切.

生丙：我也认为这种说法是正确的，关于$-\sqrt{a}(a\geqslant0)$，可以

把它看成是 a 的算术平方根乘以 -1，也就是 $-1\times\sqrt{a}$，也同样符合定义，是二次根式.

师：这个问题讨论得很好，我认为争论的两种意见是一致的. 式子 $\sqrt{a}\,(a\geqslant0)$ 叫做二次根式与一个非负数的算术平方根叫做二次根式，实质是相同的. 二次根式这一概念表示两种含意：其一，被开方数 a 代表一个非负数，否则是没有意义的；其二，符号“$\sqrt{\ }$”表示为一个正的平方根. 因此，式子 $\sqrt{a}\,(a\geqslant0)$ 是一个非负数，即 $\sqrt{a}\geqslant0\,(a\geqslant0)$. 很显然，$\sqrt{-5}$、$\sqrt{a}\,(a<0)$ 就不是二次根式了. 在以后的学习中，同学们就会知道 $\sqrt{-5}$ 是一个什么数. 关于 $-\sqrt{a}\,(a\geqslant0)$ 是二次根式，同学们的解释很正确，我不重复.

师：大家对公式 $(\sqrt{a})^2=a\,(a\geqslant0)$ 的理解有没有问题？得出这个公式的根据是什么？

生：（齐答）根据平方根的意义.

师：下面我们来研究公式

$$\sqrt{a}=\begin{cases} a & (a>0);\\ 0 & (a=0);\\ -a & (a<0). \end{cases}$$

谁还有意见请发表？

生甲：我对公式中的 $\sqrt{a^2}=-a\,(a<0)$ 还不明白. $\sqrt{a}$ 一定是个正数，为什么等式右端的 $-a$ 反而是个负数了呢？

生乙：你忘了后面所附的条件是 $a<0$. a 本身表示负数，$-a$ 就是正数，如 $\sqrt{(-3)^2}=-(-3)=3$.

生甲：你讲的我很明白，但是书上不是规定了在本章里除特别说明外，所有字母都表示正数吗？怎么 a 又小于零了呢？

（这时同学都议论起来了.）

生：这个公式是加了特别说明的，书上明确指出：我们分 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 三种情况来研究根式 $\sqrt{a^2}$，所以

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a>0); \\ 0 & (a=0); \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

(这时大多数同学都表示同意.)

师：同学们争论得很好，特别是有的同学能够举出具体的例子来说明公式

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a>0); \\ 0 & (a=0); \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

的正确性，也就是当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$ 的结果等于 a，如 $\sqrt{5}=5$，$\sqrt{(0.7)^2}=0.7$，$\sqrt{0^2}=0$；而 $a<0$ 时，$\sqrt{a}$ 的结果等于 a 的相反数，如 $\sqrt{(-5)^2}=5$，$\sqrt{(-0.7)^2}=0.7$ 等等．因此，$\sqrt{a}$ 的结果与 $|a|$ 的结果完全相同，我们可以把这两个概念联系起来，帮助我们理解与记忆.

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a>0); \\ 0 & (a=0); \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

关于书上的规定，仅适用于本章，离开这一章就没有这个规定了，如 $\sqrt{a+1}$ 是不是二次根式？

生：不一定. 当 $a\geqslant -1$ 时，$\sqrt{a+1}$ 是二次根式；当 $a<-1$ 时，$\sqrt{a+1}$ 不是二次根式.

师：回答得很好．今后学习二次根式要注意条件，如

$$\sqrt{a^6}=|a^3|=\begin{cases} a^3 & (a\geqslant 0); \\ -a^3 & (a<0). \end{cases}$$

[“启发引伸”这一教学环节，充分体现了以教师为主导，以学生为主体的教与学的双边活动，不是教师满堂灌，而是在小组讨论

的基础上对重点和疑难问题进一步在全班进行引伸研究．如对二次根式的概念及公式$\sqrt{a}=-a(a<0)$和对$\sqrt{a+1}$的讨论等，都要恰当的启发和有分寸的引伸，从而充分挖掘出概念和公式的实质，这无疑能提高学生的自学能力.]

四、巩固练习

1．计算：(口答)

(1) $(\sqrt{4})^2$；　(2) $(\sqrt{5})^2$；(3) $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$；

(4) $(2\sqrt{3})^2$；(5) $(-5\sqrt{2})^2$.

2．把下面非负数写成平方的形式：(口答)

(1) 2；(2) 0.5；(3) $\frac{1}{7}$；(4) ab.

3．(口答)下列等式是否成立？为什么？

(1) $(\sqrt{7})^2=7$；(2) $(-\sqrt{7})^2=-7$；(3) $\sqrt{6^2}=6$；

(4) $\sqrt{(-6)^2}=-6$.

4．写出下列各式的值：(同学们做在练习本上，做完后对答案.)

(1) $(\sqrt{0.8})^2$；　(2) $\sqrt{0.8^2}$；　(3) $\sqrt{(-0.8)^2}$；

(4) $-\sqrt{(-0.8)^2}$；　(5) $\sqrt{(5-9)^2}$；(6) $\sqrt{\left(3\frac{1}{2}-2\right)^2}$；

(7) $\sqrt{(b-4)^2}\,(b>4)$；　(8) $\sqrt{(m-n)^2}\,(m<n)$.

师：课本的例2，把下面的非负数写成平方的形式：其中解(1) $2=(\sqrt{2})^2$，同学们考虑一下这个答案是否正确？

生：我认为$2=(\pm\sqrt{2})^2$，这样才是正确的．因为$(\pm\sqrt{2})^2$都等于2，所以把2写成平方形式也应该包括$(-\sqrt{2})^2$.

师：回答得很好，肯动脑筋想问题．这样我们把课本的例2的答案补充完整了.

小结、布置作业(略).

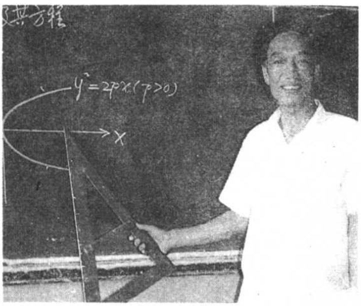
[巩固练习阶段是对前三个阶段教学情况的检查．这段教学的特点是，教师不是让学生单纯运用所学知识去做题，而是根据教学内容与学生的实际情况选编练习题，研究和检查学生对所学基础

知识的理解和掌握情况．例如，师生对课本例 2 答案的探究，就是具有这一特点的典型例证．它不仅巩固了本节课所学的基础知识，更重要的是进一步开阔和训练了学生的思维，激发了学生的学习兴趣，收到了良好的教学效果．]

根式的基本性质

郝君方（天津市第二十三中学）

作者简历



郝君方　河南淇县人，1964年毕业于北京师范大学数学系，同年任天津市二十三中学数学教师．1987年被评为天津市中学高级教师．现任天津市二十三中学数学教研组组长，兼任天津市河西区数学教学研究会副会长．

教学目的

(1) 使学生掌握根式的基本性质，并能正确地化异次根式为同次根式．

(2) 培养学生分析问题和归纳问题的能力．

教学过程

一、复习提问

师：下列各题先用代数式表示，再计算出结果：

(1) 2.3 的平方根，$(-2.3)^2$的算术平方根．

(2) -8 的立方根，8 的立方根的相反数.

(3) $a^4(a\geqslant0)$的四次方根，$a^4(a<0)$的四次算术根.

(4) 2^n 的 n 次算术根，2 的 n 次算术根的 n 次幂.

生：(1) $\pm\sqrt{2.3}=\pm2.3$，$\sqrt{(-2.3)}=\sqrt{2.3}=2.3$.

(2) $\sqrt[3]{-8}=-2$，$-\sqrt[3]{8}=-2$.

(3) $\pm\sqrt[4]{a^4}=\pm a(a\geqslant0)$，$\sqrt[4]{a^4}(a<0)=\sqrt[4]{|a|^4}=|a|=-a$.

(4) $\sqrt[n]{2^n}=2$，$(\sqrt[n]{2})^n=2$.

师：把下列根式改用算术根表示：

(1) $\sqrt[3]{-5}$. (2) $\sqrt[2n+1]{-6}$. (3) $\sqrt[2n+1]{a}(a<0)$.

生：(1) $\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$. (2) $\sqrt[2n+1]{-6}=-\sqrt[2n+1]{6}$.

(3) $\sqrt[2n+1]{a}=-\sqrt[2n+1]{|a|}$或$-\sqrt[2n+1]{-a}(a<0)$.

(学生回答之后，教师归纳并指出.)

师：正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，其中正的方根是算术根；负数的偶次方根没有意义；负数的奇次方根都可以化成被开方数是正数的同次方根的相反数. 因此，我们研究根式的性质时，只要研究算术根就可以了.

二、创设问题情景

师：下面我们研究幂的算术根的性质. 请同学们化简下列根式：

$\sqrt{3^6}$，$\sqrt[3]{2^{12}}$，$\sqrt[4]{2^{20}}$，$\sqrt[5]{3^{15}}$，$\sqrt[n]{a^{np}}(a\geqslant0)$ (其中 n 为大于 1 的整数，p 为正整数).

(学生回答，教师板书.)

生：$\sqrt{3^6}=\sqrt{(3^3)}=3^3$，$\sqrt[3]{2^{1}}=\sqrt[3]{(2^4)^3}=2^4$，

$\sqrt[4]{2\ ^0}=\sqrt[4]{(2^5)^4}=2^5$，$\sqrt[5]{3^{15}}=\sqrt[5]{(3^3)^5}=3^3$，

$\sqrt[n]{a^{np}}=\sqrt[n]{(a^p)^n}=a^p\quad(a\geqslant0)$.

师：当被开方数的幂指数是根指数的整数倍时，所得结果的幂指数和原根式中被开方数的幂指数、根指数之间有什么关系？

生甲：所得结果的幂指数恰好等于被开方数的幂指数除以根指数的商.

生乙：把原根式中被开方数的幂指数和根指数直接约分，恰好等于所得结果的幂指数.

生丙：根式中被开方数的幂指数和根指数同时除以它们的最大公约数，恰好等于所得结果的幂指数.

师：同学们回答得很好，最后一种说法更具有一般性. 下面，我们就会看到这一点. 那么，被开方数中的底数 $a\geqslant 0$ 这个条件，在化简的过程中，哪一步需要用到它？如果 $a<0$，根式 $\sqrt[n]{a^{np}}$ 还能不能化简为 a^p？

（引导学生重新观察、思考上面几个根式的化简过程.）

生：如果把根式 $\sqrt{3^6}$ 中的底数 3 改为 -3，有

$$\sqrt{(-3)^6}=\sqrt{[(-3)^3]^2}=|(-3)^3|,$$

不能通过根指数与幂指数直接约分得到 $(-3)^3$.

$a\geqslant 0$ 这个条件，在化简的第二步：由 $\sqrt[n]{(a^p)^n}$ 等于 a^p 是不能少的.

[数学教学是思维活动的教学，不仅要重视思维的结果，更要重视思维的过程，让学生学会观察、比较、归纳、发现等思维方法.]

师：$a\geqslant 0$ 这个条件常常被忽视，常出现 $\sqrt[4]{a}=\sqrt{a}$ 的错误，同学们应该注意.

一般地，当被开方数的幂指数与根指数有公约数 p（p 是大于 1 的整数）时，根式 $\sqrt[np]{a^{mp}}$（m 是正整数，n 是大于 1 的整数，$a\geqslant 0$）可化简为 $\sqrt[n]{a^m}$，即

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad (a\geqslant 0). \qquad ①$$

这里 m 是正整数，n、p 都是大于 1 的整数. 这个等式表达的性质叫做根式的基本性质.

从左向右看等式①，根式的根指数和被开方数的幂指数都除以同一个正整数 p，根式的值不变；从右向左看等式，根式的根指

数和被开方数的幂指数都乘以同一个正整数 p，根式的值不变.

等式 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ 成立的条件是：(i) $a\geqslant0$；(ii) 被开方数是幂的形式；(iii) 两边的根式都是算术根.

（让学生阅读课本上关于同次根式、异次根式的定义，让学生举例区别同次根式与同类根式，分清两个不同的概念.）

师：利用根式的基本性质，可以把异次根式化为同次根式.

三、例题和练习

师：下面，我们一起来讨论几个问题.

[例 1] 把 $\sqrt[4]{3}$、$\sqrt[3]{-5}$、$\sqrt[6]{(-2)^4}$ 化成同次根式.

解 把这三个根式都化成 12 次根式(因为根指数 3、4、6 的最小公倍数是 12).

$$\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}.$$

其他两个根式的被开方数的幂底数是负数，化为正数后才能使用根式的基本性质.

$$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}=-\sqrt[12]{5^4}=-\sqrt[12]{625},$$
$$\sqrt[6]{(-2)^4}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[12]{2^8}=\sqrt[12]{256}.$$

[例 2] 把 $\sqrt{2mn}$、$\sqrt[5]{-6m^2n}$、$\sqrt[10]{5m}$ 化成同次根式.

师：先请同学们考虑字母 m、n 的取值范围，然后再解.

生：要使 $\sqrt[10]{5m}$ 有意义，必须 $m\geqslant0$；又要使 $\sqrt{2mn}$ 有意义，必须 $n\geqslant0$. 所以

$$\sqrt{2mn}=\sqrt[10]{(2mn)^5}=\sqrt[10]{32m^5n^5},$$
$$\sqrt[5]{-6m^2n}=-\sqrt[5]{6m^2n}=-\sqrt[10]{36m^4n^2},$$
$$\sqrt[10]{5m}.$$

师：下面，请同学们做练习.

1. 约简下列根式中被开方数的幂指数及根指数：

(1) $\sqrt[4]{a^2}\,(a\geqslant0)$； (2) $\sqrt[4]{a^2}\,(a<0)$； (3) $\sqrt[4]{16x^8y^{12}}$.

2. 化简：

$\sqrt{\frac{8x^3y^6}{27a^6b^9}}$($x<0$, $b<0$, $a\neq0$, y 为任意实数).

小结、课外作业均略.

教案说明

(1) 根式的基本性质不仅对根式运算具有重要性，而且对整个代数运算而言也是十分重要的. 因此，教学中紧紧抓住这一关节点，引导学生发现、提炼和应用根式的基本性质，而把其他的概念，如同次根式和异次根式，让学生通过阅读课本自己掌握. 这样，教学重点突出，主次得当.

(2) 通过例题引导学生提炼根式的基本性质又是本节课的重点，尽管学生所提炼出的性质常常是不完善的，但却是通过自己的积极思考得出的，这样的思考过程是数学思维的核心，教师理应帮助学生去粗取精，去伪存真，努力提高学生的思维品质.

(3) 在引导学生得出根式的基本性质时，必须让学生同时注意到 $a\geqslant0$ 这个条件，使这个条件由学生自己提出并加以强调. 这样，不仅有利于学生牢记这个条件，而且有利于培养学生思维的严密性.

一元二次方程的概念

臧龙光（北京工业大学附中）

作者简历



臧龙光　北京市人，1963年毕业于北京师范学院数学系，同年任北京工业大学附中数学教师．1988年被评为北京市中学高级教师．1986年获北京市普教系统先进工作者称号，1987年获北京市普教系统教书育人先进工作者称号，1989年获北京市优秀教师称号，1989年获全国优秀教师称号，并被授予优秀教师奖章．现任北京工业大学附中数学教师、数学教研组组长，北京市教育局教学研究部中学数学兼职教研员，北京师范学院荣誉教师，北京市第九届人民代表大会代表．

教学目的

通过一元二次方程的教学，使学生正确理解一元二次方程的概念，掌握一元二次方程的一般形式，培养学生由具体到抽象、由特殊到一般的分析、概括能力．

教学过程

师：在初中一年级，我们已经学过一元一次方程和它的解法．同学们回忆一下：什么叫一元一次方程？能举出例子吗？一元一次方程的一般形式是怎样的？

生：……

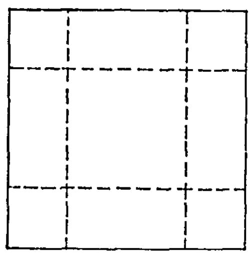
[温故而知新，无论从知识的前后联系上，还是从教学方法上讲，复习一元一次方程的概念都是十分必要的.]

师：我们已经学过一元一次方程的解法和应用．现在我们来看下面几个问题(出示小黑板)：

问题1 要剪一块面积是9平方厘米的正方形纸片，应该怎样剪法？

问题2 要剪一块面积是150平方厘米的长方形纸片，使它的长比宽多5厘米，应该怎样剪法？

问题3 如图，用一块正方形纸板，在四个角上截去四个相同的边长为2厘米的小正方形，然后把四边折起来，做成一个没有盖的长方体盒子，使它的容积为32立方厘米．所用的正方形纸板的边长应是多少厘米？



这些问题如果列方程来解，那么列出来的方程是什么样呢？

(学生议论，教师巡视检查，请列出一元二次方程的学生来回答.)

生甲：在问题1中，设正方形的边长是x厘米，根据题意列出的方程是

$$x^2=9.$$

生乙：在问题2中，如果设长方形的宽为x厘米，那么长就是$(x+5)$厘米，根据题意列出的方程是

$$x(x+5)=150.$$

生丙：在问题3中，设所用正方形纸板的边长是x厘米，这时

长方体盒子底面的正方形的边长就是$(x-4)$厘米，根据题意列出的方程是

$$2(x-4)^2=32.$$

[通常，学生列出的就是这三个方程，但也有可能列出的是分式方程或二元方程组. 这时教师要引导学生把它们化为一元整式方程，使学生把注意力集中在具体的一元二次方程上. 如果学生没有提出列分式方程或二元方程组的问题，那么就不必往这方面引导，以免影响教学重点.]

师：方程都列对了，很好. 如果我们把这三个方程通过去括号、移项、合并同类项，进行整理，就会得到

$$x^2-9=0,$$
$$x^2+5x-150=0,$$
$$2x^2-16x=0.$$

[这一步很重要，为引出一元二次方程的概念和一元二次方程的一般形式准备好了素材. 往下需要解决的就是引导学生如何认识这些方程的问题. 这要分两步来做：第一步，把这些方程与一元一次方程进行比较——这是纵向比较，引出一元二次方程的概念；第二步，把这三个方程加以比较——这是横向比较，抽象、概括出一元二次方程的一般形式. 在概念教学中，比较是帮助学生正确理解概念的有效方法.]

师：这三个方程是一元一次方程吗？

生(众)：不是.

师：这些方程与我们以前学过的一元一次方程不完全相同. 我们在前面已经复习过，一个方程是一元一次方程要具备三个条件：它是整式方程；方程中只含有一个未知数；未知数的次数只有一次. 这些方程与一元一次方程比较，有哪些相同点？有哪些不同点？

[通过比较，有利于引导学生揭示一元二次方程的特征.]

生：相同点有两个：(1) 它们都是整式方程；(2) 都只含有一个未知数．不同点是：这些方程中未知数的最高次数是 2，而一元一次方程的未知数的最高次数是 1．

师：这三个方程是一类新的方程，它们都是只含有一个未知数的整式方程，并且未知数的最高次数是 2．像这样的方程，应该给它什么样的名称呢？

生：应该叫做一元二次方程．

师：一般说来，只含有一个未知数的整式方程，经过整理，如果所含未知数的最高次数是 2，那么这样的方程叫做一元二次方程．

（教师板书课题，并写出一元二次方程的定义．）

师：现在，同学们来判断下列方程是不是一元二次方程．如果不是，请说出为什么．

（出示小黑板．）

(1) $2x^2-3x-1=0$；　　(2) $\frac{4}{x+3}=1$；

(3) $1-x^2=0$；　　(4) $5x^2=0$；

(5) $x^2+y=0$　（x 和 y 都是未知数）；

(6) $(x+3)^2=(x-3)^2$；

(7) $mx^2-3x+2=0$　（m 是系数）；

(8) $(a^2+1)x^2+(2a-1)x+5-a=0$　（x 是未知数）．

[及时巩固，收效大．]

（在学生议论的基础上，请学生回答．）

生甲：(1)、(3)、(4) 是．

生乙：(2) 不是．因为方程的左边是分式而不是整式．

生丙：(5) 不是．因为方程中有两个未知数．

生丁：(6) 是．因为方程两边展开后，未知数 x 的最高次数是 2．

生戊：(6)不是.

师：为什么？

生戊：(6)的两边展开后，得 $x^2+6x+9=x^2-6x+9$. 整理以后，得 $12x=0$，未知数 x 的最高次数是 1，不是 2. 这实际上是一元一次方程.

师：对！要注意整理方程，然后再判断.

生己：(7)是.

生庚：(7)不一定是.

师：为什么呢？

生庚：这个方程是不是一元二次方程，要看 x^2 这一项的系数 m 是不是零. 如果 m 不是零，它就是一元二次方程；如果 m 是零，它就不是一元二次方程.

师：答得非常好！对于含有字母系数的方程，我们一定要特别小心. 只有 x^2 这一项系数中的字母取值不使系数为零时，它才是一元二次方程. 否则，它就不是一元二次方程. 对这个问题，我们要特别注意.

生辛：(8)是.

师：请说说理由.

生辛：因为 a 是实数，所以 $a^2\geqslant 0$，$a^2+1>0$，就是说，$a^2+1\neq 0$. 因为 x^2 这一项的系数不是零，所以它是一元二次方程.

师：很好！

[至此，可以说，学生对一元二次方程概念的理解不是仅仅停留在方程的表面形式上，而是抓住了一元二次方程概念的实质.]

师：现在让我们再来看这三个方程：

$$x^2-9=0,$$

$$x^2+5x-150=0,$$

$$2x^2-16x=0.$$

它们都是一元二次方程. 它们有哪些相同点？有哪些不同点？

[通过比较，由特殊到一般、由具体到抽象，概括出一元二次方程的一般形式.]

生：相同点是：方程的右边是零，左边都有未知数 x 的二次方的项；不同点是：第二个方程左边是未知数 x 的二次三项式，而第一个方程左边没有未知数 x 的一次方的项，第三个方程左边没有常数这样的项.

师：如果把第一个方程和第三个方程写成

$$x^2+0x-9=0$$

和

$$2x^2-16x+0=0,$$

那么这三个一元二次方程就都可以表示成

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

这种形式.

一般说来，任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都可以化为这种形式. 这种形式叫做一元二次方程的一般形式.

(板书：一元二次方程的一般形式：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0).)$$

师：一元二次方程的一般形式有什么特点呢？

生：方程的右边是零，左边是按 x 的降幂排列的二次三项式，并且 a 不等于零.

师：对！在一元二次方程的一般形式中，我们把 ax^2 叫做二次项，a 叫做二次项的系数；bx 叫做一次项，b 叫做一次项的系数；c 叫做常数项.

(板书：二次项 ax^2，二次项系数 a；
一次项 bx，一次项系数 b；
常数项 c.)

师：在一元二次方程的一般形式中，我们知道二次项系数 a 不能是零，一次项系数 b 或常数项 c 可以是零. 如果 b 或 c 是零，那么可得到怎样形式的一元二次方程呢？

生：如果 $b=0$，$c\neq0$，方程就是 $ax^2+c=0$；如果 $b\neq0$，$c=0$，方程就是 $ax^2+bx=0$；如果 b 和 c 都是零，方程就是 $ax^2=0$ 了.

师：对！这些都是一元二次方程的特殊情况．我们把这些特殊的一元二次方程都叫做不完全一元二次方程，而把 a、b、c 都不是零的一元二次方程叫做完全一元二次方程.

我们知道，一元一次方程 $ax=b(a\neq0)$ 的根是由系数 a 和常数 b 决定的．同样，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根也是由二次项系数 a、一次项系数 b 和常数项 c 决定的，以后我们就会学到．因此，认准一元二次方程中的二次项系数、一次项系数和常数项显得特别重要．现在，让我们翻开书，做个简单练习：

说出下列一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $4x^2+3x-2=0$.　　(2) $3x^2-5=0$.

(3) $6x^2-x=0$.　　(4) $7x^2=0$.

生：……

师：一般说来，只有把一元二次方程化为一般形式，才便于指出它的二次项系数、一次项系数和常数项．现在，我们来看下面的例题：

[例]　把方程 $4x(x+3)=5(x-1)^2+8$ 化为一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

请同学们自己完成.

（同时，由一位同学板演．做完题后，师生一起订正．注意书写是否规范.）

师：翻开课本，做课本的练习：

把下列方程先化为一元二次方程的一般形式，再写出它的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $3x^2=5x+2$;　　(2) $(x+3)(x-4)=-6$;

(3) $3x(x-1)=2(x+2)-4$;

(4) $(2x-1)(3x+2)=x^2+2$;

(5) $(t+1)^2-2(t-1)^2=6t-5$;

(6) $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})+(2y+1)^2=4y-5$.

(学生完成后,教师让学生逐题口答结果,订正.)

师:这节课,我们学习了一元二次方程的概念和一元二次方程的一般形式.我们在这一章中还要进一步研究一元二次方程的解法和一元二次方程的有关性质,这些概念要经常用到,同学们要认真掌握好.

阅读课本、布置作业均略.

教案说明

这是一节概念课.概念教学有它自身的规律.数学概念的产生和形成过程,一般地说,是人们在对实际的(或具体的)事例观察的基础上,通过比较、分析、归纳,再进一步概括、抽象出本质的过程.实质上就是一个思考过程.数学概念的教学,就是在教师的指导下,由学生自己积极思维,经历上述思考过程,形成并建立数学概念的一种活动.

一元二次方程的概念本身并不难理解.对于数学基础好的班级,完全可以安排学生自学.但是,即使学生数学基础好,学生也难免在理解概念时停留在表面的字句上,而对于概念的内涵、外延未必能做到准确理解.对于数学基础一般的学生,情况更是这样.因此,无论采取什么样的教学方法,教师的主导作用都是不可缺少的.本教案是针对数学基础一般的普通班设计的,希望通过教师的启发,使学生能正确理解一元二次方程的概念,牢固掌握一元二次方程的一般形式.

关于这节课的教学安排,有以下6个环节:复习一元一次方程;由实际问题引出一元二次方程,说明学习一元二次方程的必要性;与一元一次方程比较建立一元二次方程的概念;介绍一元二次

方程的一般形式，并明确有关概念；练习巩固；阅读课本，布置作业.

为什么要这样安排呢？我是这样考虑的：

环节1安排复习一元一次方程，这是非常必要的. 因为从知识联系上讲，一元二次方程和一元一次方程都是简单的整式方程. 一元一次方程是基础，一元二次方程是延伸，先复习一元一次方程，合乎知识的逻辑发展；从教学方法上讲，由于一元二次方程和一元一次方程都是只含有一个未知数的整式方程，差异仅仅在于未知数的最高次数不同，所以，很容易通过与一元一次方程的概念进行比较，建立起一元二次方程的概念. 因此，先复习一元一次方程，再介绍一元二次方程就可顺理成章了.

环节2是把三个实际问题抽象为数学问题——含有一个未知数并且未知数的最高次数是2的整式方程. 为什么要选这三个实际问题呢？从实践论的观点看，只有感觉的材料十分丰富和合于实际，才能根据这样的材料得出正确的概念来. 这就是说，抽象概括要以较丰富的感觉材料为基础. 由这三个实际问题得到的方程，有完全一元二次方程，也有不完全一元二次方程，这就为讲解一元二次方程的概念时突出“二次”和讲解一元二次方程的一般形式时突出“$a\neq 0$”做好了准备，有利于揭示一元二次方程概念的内涵和外延，从而使学生正确理解一元二次方程的概念. 同时，也使学生认识到数学概念的产生来源于实际的需要，体会到学习一元二次方程的必要性.

如果说环节2解决的是如何“引出”的问题，那么环节3和环节4要解决的就是如何“认识”的问题. 怎样认识呢？教学实践告诉我们：比较是讲解概念的有效方法. 环节3通过把所得方程与一元一次方程进行纵向比较，突出了方程中未知数的最高次数是2，由此得出一元二次方程的概念；环节4通过把所得三个方程进行横向比较，抽象概括出一元二次方程的一般形式. 这样安排，显

然是符合数学概念教学的一般规律的.

众所周知,思维从问题始,思维总是指向某个任务的. 为了激发学生积极思维,在教学的各个环节中,在知识的引发点和关键点上,不断向学生提出适当的问题,给出"指向",在教师的启发引导下,让学生去思考,去探索. 这样,学生的思维活动就能始终处于积极状态,整个教学活动就能够按照教学目的规定的目标前进.

应用配方法解一元二次方程

王绍鹏（吉林省吉林市铁路一中）

作者简历



王绍鹏 吉林市人，1965年毕业于吉林大学数学系，同年任吉林市铁路一中数学教师．1988年先后被评为吉林省中学高级教师、特级教师．1985年评为铁道部优秀教师，1988年评为吉林市中学数学科优秀任课教师标兵，同年，吉林省政府特记二等功．现任吉林市铁路一中数学教师，吉林市数学会常务理事．

教学目的

(1) 使学生理解配方法的基本思想，掌握用配方法解一元二次方程的四个基本步骤．

(2) 培养学生观察、分析和归纳总结的能力．

教学过程

一、创设问题情境

师：上节课我们学习了可以直接用开平方的方法求解的一元

二次方程，请同学们考虑一下，什么类型的一元二次方程可直接用开平方的方法来求解？

生：一元二次方程的一边是一个含有未知数的式子的完全平方，另一边是一个非负常数，就可以直接用开平方的方法来解．

师：正确！

（出示活动教具，如图1所示．）

请同学们考虑这样一个问题，若把一个正方形的每条边都增加3厘米后，所得的新正方形的面积为121平方厘米，问原正方形的边长是多少厘米？

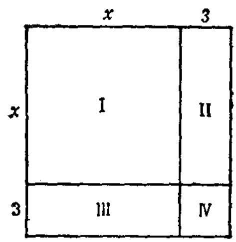


图 1

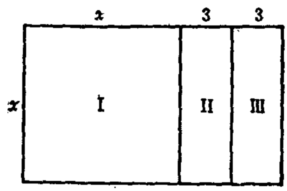


图 2

生：根据题意可列出方程 $(x+3)^2=121$，用直接开平方的方法可解得 $x=8$．所以，原正方形边长是8厘米．

师：在图1中，若把面积为9平方厘米的第IV部分拿掉，再把I、II、III部分拼成图2那样的长方形，请用方程表示这长方形的边长与面积的关系．

生：方程为 $x(x+6)=112$．

师：把这个方程左边的括号去掉就变成

$$x^2+6x=112. \quad ①$$

你们会解这个方程吗？

二、探究新知识

（把图2中的三部分拼成图3.）

师：要把图3重新拼成正方形，那就需要加上一个小正方形．同学们想一想：

（1）所补加的小正方形的边长和面积应各是多少？

（2）补加了小正方形后，表示所得正方形边长和面积关系的方程是什么？

（学生通过讨论得出答案，教师板书.）

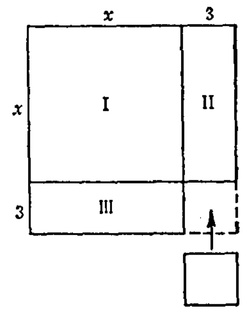


图 3

$$x^2+6x+3^2=112+3^2,$$

即

$$(x+3)^2=121. \qquad ②$$

师：从图3看出，补加小正方形后得到一个边长为$x+3$的正方形．这情况反映在方程上，就是在方程①的两边加上一个常数3^2后变为方程②，从而使方程②的左边配成了完全平方式．于是，我们就可以用直接开平方的方法来解出这个方程．像这种解方程①的方法，就是我们今天要学的解一元二次方程的配方法．

（教师板书课题.）

师：大家来讨论下面的问题：

要使方程①的左边x^2+6x成为关于x的完全平方式，方程①的两边所添加的常数与这方程的哪一项系数有关？有什么关系？

生：所添加的常数与原方程的一次项系数有关，是一次项系数一半的平方．

师：结论正确．把方程①的左边配成完全平方式时，应用了什么公式？

生：应用 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

三、变式练习，巩固新知识

师：添加常数，配成完全平方式，是用配方法解一元二次方程的关键，也是难点. 我们先做下面的练习，填写下表.

（教师出示小黑板，第二行由学生填写，其余教师填写，让六名学生口答.）

代数式	变形式	加上的数	配成的平方式
x^2-4x	$x^2+2\cdot(-2)x$	$(-2)^2$	$(x-2)^2$
x^2+3x	$x^2+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)x$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$
$x^2-\frac{5}{2}x$	$x^2+2\left(-\frac{5}{4}\right)x$	$\left(\frac{5}{4}\right)^2$	$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2$
$x^2+0.3x$	$x^2+2\cdot(0.15)x$	$(0.15)^2$	$(x+0.15)^2$
$x^2+\sqrt{2}x$	$x^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
x^2-ax	$x^2+2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)x$	$\left(-\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$
$x^2+\frac{b}{a}x$	$x^2+2\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)x$	$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

师：用配方法解下列方程：

(1) $x^2-4x=3$.

(2) $x^2+2\sqrt{3}x+1=0$.

(3) $x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$.

（请三名学生板演，其他学生自己练习. 集体评定，纠正错误.）

师：以上三题的共同特征是什么？

生：二次项系数都是1.

$\left(\text{教师把 } x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0 \text{ 的两边都乘以 2, 提出新问题.}\right)$

师：把方程 $2x^2+5x-1=0$ 的两边都加上$\left(\frac{5}{2}\right)^2$，能不能达到配方的目的？

生(众)：不能.

师：那么用配方法解 $2x^2+5x-1=0$ 的关键是什么呢？

生：用二次项系数除方程两边把方程化成

$$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0.$$

师：对于二次项系数不是1的一元二次方程可用配方法解吗？

生：可以.

四、归纳小结

师：现在，我们一起来归纳用配方法解 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的基本步骤.

(先由学生自己归纳，然后让学生举手发言，教师边听边板书，让学生充分发表见解，最后教师对学生的归纳作出总结.)

师：用配方法解一元二次方程可归纳为四步：

(1) 将方程化为二次项系数为1的形式；

(2) 移项，使方程左边只有二次项和一次项，右边只有常数项；

(3) 在方程两边同时加上一次项系数的一半的平方，使方程左边配成一个完全平方式；

(4) 配方后若方程右边是一个非负数，再通过开平方法求出方程的根.

这里，有一个问题请同学们考虑，方程经配方后，若左边是关于未知数的完全平方式，那么右边的常数应该是什么数时，方程才有意义？

生：右边的常数应该是非负数.

五、课 堂 练 习

（将事先印好的练习发给学生，待学生完成后出示标准答案，同座学生交换、互批.）

1. 解下列方程：(每题 30 分)

(1) $t^2-4t-4=0$;

(2) $3x^2-1=6x$.

2. 填空，解关于 x 的二次方程 $x^2+ax-b=0$.（此题 40 分）

解：$x^2+2\cdot(\quad)x=(\quad)$,

$x^2+2\cdot(\quad)x+(\quad)^2=(\qquad)$,

$[x+(\quad)]^2=(\qquad)$.

当(　　　　　　)时，

$x=(\qquad\qquad)$.

（教师统计考试成绩，掌握课堂效果.）

布置作业：略.

教案说明

本节课教学的基本目的是让学生学会用配方法解一元二次方程. 为完成这一教学目的，可以采取直接传授的方法，即教师按课本中的顺序清楚明确地把配方法告诉学生，然后通过做习题来加以巩固. 这种教学方法具有直截了当的特点，但不利于开启学生思维，就不易使学生在接受知识的同时提高观察、分析和归纳总结的能力. 因此，本教案采取将配方与正方形的割补联系起来，使学生从图形的割补中提炼出方程配方的基本步骤，并认识其合理性，这

种教学方法曾经是我国古代关于解同类问题的基本思想方法，历史证明，它具有很强的启迪性，有助于学生认清问题的实质和明确解题的思路.

为了充分发挥每个学生思维的积极性，本教案强调学生与教师一起共同参与教学活动，其中包括有问题大家讨论；学生板演集体评定；练习解答互批互评等等. 只要我们坚持把数学活动过程体现在教学中，又尽力发挥学生的思维积极性，那么学生所学到的就不仅是一些具体的方法，而且会学到分析问题和解决问题的一般方法.

一元二次方程的根与系数的关系

龚方程（四川省江津县江津中学）

作者简历



龚方程　四川江津人，1950年毕业于四川省江津师范学校，1956年在部队速成中学任数学教师．1963年修完哈尔滨师范学院数学系本科函授，1964年在四川江津中学任数学教师，1987年被评为四川省中学高级教师．1991年被评为全国优秀教师．现任江津中学数学教师，数学教研组组长．

教学目的

（1）通过学生自己探索一元二次方程的根与系数的关系，培养学生观察、分析和综合、判断的能力．

（2）使学生能利用一元二次方程根与系数关系，解已知一元二次方程及其一个根，求另一个根；已知一元二次方程，不解这个方程，求某些代数式的值的问题．

教学过程

一、复习提问

(1) 口述一元二次方程的求根公式;

(2) 解下列方程:(口答)

$$x^2-3x-4=0;\ x^2+3x=0.$$

(教师将口答的正确结果板书于各题后备用.)

二、引入新课

师: 同学们,在上次的作业中,我们做过这样一道题:用因式分解法解方程 $y^2-17y+30=0$,哪位同学来讲讲自己的解法?

生:
$$y^2-17y+30=0,$$
$$(y-15)(y-2)=0,$$
$$\therefore\quad y_1=15,\ y_2=2.$$

师: 很好!现在我再提个问题:所得到的两个根 15 和 2 与方程的系数之间有什么关系?哪个同学能回答.

[问题虽然有相当的难度,但它能激励学生去观察,去发现.惊喜的发现就在认真仔细的观察中.]

生甲: 我发现 $15+2=17$, $15\times2=30$.

师: 好!你能把你的发现归纳成一般结论吗?

生甲: 我试试. 方程的两个根加起来正好是方程的一次项系数;方程的两个根相乘正好等于方程的常数项.

师: 很好!值得表扬. 虽然所归纳成的一般结论还有些缺陷,但一元二次方程的根与系数之间的关系基本上被揭示出来了,这等于发现了一个很有意义的命题,了不起.

同学们考虑一下,生甲发现的命题有哪些缺陷需要修正的.

[对学生有价值的发现必须予以充分肯定和表扬.]

生乙: 我认为方程的两个根加起来应该等于方程的一次项系数的相反数.

师：大家看，对吗？

生：对！

师：好极了，还有没有其他地方需要修正的呢？比如语句表述是否可以更正确、简练些？

[对学生一时难以发现的问题，教师可以挑明问题让学生去思考.]

生：可以更简练地说成：一元二次方程的两根之和等于一次项系数的相反数，两根之积等于常数项.

师：不错！这里用了"两根之和"、"两根之积"的说法. 显然它比用"两个根加起来正好是……"、"两个根相乘正好等于……"的说法要简明，而且更显得数学化了.

[必须经常注意修正学生的数学用语.]

师：还有需要修正的吗？难道一元二次方程的根只与一次项系数以及常数项有关，与二次项系数无关吗？

[为培养学生严密思考问题的习惯，当学生尚未能深入发现问题本质的时候，就必须通过提问引导学生作全面深入的思考.]

这个问题同学们可能一时回答不出，这不要紧，通过下面进一步的观察、比较，同学们一定会回答这个问题的.

三、新　　课

（教师展示事先设计好的小黑板，其中方程的两根及方程的系

一元二次方程	方程的两根		方程的系数	
	x_1	x_2	一次项	常数项
$x^2-3x-4=0$	4	-1	-3	-4
$x^2+3x=0$	0	-3	3	0
$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

数两栏空着，让学生填写表中方程的两个根及方程的系数.）

师：请同学们仔细观察这三个方程中的一次项系数、常数项与方程两个根之间有什么关系？

生：方程中两根之和等于一次项系数的相反数，两根之积等于方程的常数项.

师：这样看来同学们所发现的命题是正确的可能性很大了.但是仅仅依靠举例是不足以确证命题正确性的，要保证命题正确，我们还得考察一般形式的方程是否也具有“两根之和等于一次项系数的相反数，两根之积等于常数项”这样的性质.

上面我们所考察的一元二次方程，其二次项系数都等于1，这种方程的一般形式可写成

$$x^2+px+q=0.$$

假设这个方程的两个根为 x_1 和 x_2，那么同学们所发现的命题用式子表示应是怎样的呢？

生：$x_1+x_2=-p$；$x_1x_2=q$.

师：下面我们就一起来证明这个结论.

（用问答形式，引导学生一步一步深入.）

由一元二次方程的求根公式，知 $x^2+px+q=0(p^2-4q\geqslant 0)$ 的两根为

$$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

$$\therefore\quad x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$=\frac{-2p}{2}=-p;$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-p+\sqrt{p\ -4q}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{p\ -4q}}{2}$$

$$=\frac{(-p)^2-(p^2-4q)}{4}=q.$$

师：现在同学可以自信地声称，我们不仅发现一个命题，而且是一个可以称之为定理的正确的命题.

让我们乘胜前进，去发现更多的奥妙吧！

现在我问同学们，若二次项系数不为1，即方程的一般形式为

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

时，方程的两个根 x_1、x_2 与方程的系数又有什么关系呢？我们能不能利用前面已有的结论去发现新的结果呢？

生：能！只要把这个方程变成二次项系数等于1的方程就可以了.

师：你能说说怎么变吗？

生：因为二次项系数 $a\neq 0$，所以可以对方程两边同除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

于是，根据前面从二次项系数为1的一元二次方程所得出的结果，有

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

师：很好！这样我们就得出了更一般的一元二次方程根与系数之间的关系，这个关系是说：

"如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个根，那么这两个根的和等于方程的一次项系数除以二次项系数所得商的相反数；两根之积等于方程的常数项除以二次项系数所得的商."

这个结果曾由法国数学家韦达（Viète，1540—1603）所揭示，现在通常称其为韦达定理. 事实证明，只要同学用心观察，认真作比较分析，这样的结果也不是不能发现的.

同学们有兴趣的话，不妨去探索一下两根之差、之商与方程系数的关系，

下面，我们进一步学习韦达定理的应用.

[例1] 已知方程 $5x^2+kx-6=0$ 的一个根是 2, 求它的另一个根及 k 的值.

解法一 $\because$ $x=2$ 代入原方程得

$$20+2k-6=0,$$

$$\therefore\quad k=-7.$$

将 $k=-7$ 代入原方程, 得

$$5x^2-7x-6=0,\ (5x+3)(x-2)=0.$$

$$\therefore\quad x_1=2,\ x_2=-\frac{3}{5}.$$

解法二 设另一根为 x_2. 由根与系数的关系, 知

$$2\cdot x_2=-\frac{6}{5},\quad \therefore\quad x_2=-\frac{3}{5}.$$

$$2+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{k}{5},\ \frac{7}{5}=-\frac{k}{5},\ \therefore k=-7.$$

同学们比较一下, 哪一种解法简便? 显然利用根与系数的关系来解决已知一根, 求另一根及方程中参数 k 值的题型要简捷得多.

[例2] 利用根与系数的关系, 求一元二次方程 $2x^2+3x-1=0$ 两根的

(1) 平方和; (2) 倒数和.

若设方程的两根为 x_1、x_2, 则平方和可表示成 $x_1^2+x_2^2$; 倒数和可表示成 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$, 这些式子都有一个共同的特点, 就是经过恒等变形可以把它们化成含有 x_1+x_2 和 $x_1\cdot x_2$ 形式的代数式, 这样就可以利用根与系数的关系把 x_1+x_2 和 $x_1\cdot x_2$ 的值代入而求得原式的值.

解 设方程的两个根是 x_1、x_2, 那么

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2},\ x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}.$$

(1) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}.$$

(2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3.$

四、巩 固 练 习

师：请同学们做下面的练习.（出示小黑板.）

利用根与系数的关系，检验下列方程后的两个数，是否都是该方程的两个根：

(1) $x^2-3x-10=0$, $(5, -2)$;　　(2) $x^2-2x-8=0$, $(2, -4)$;

(3) $4x^2-11x-6=0$, $\left(2, \frac{3}{4}\right)$;

(4) $x^2+x-1=0$, $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

师：应用韦达定理对一元二次方程验根，具有简明易行的特点，但要注意，必须同时检验$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$都成立才行．如第 (2) 题虽然 $x_1\cdot x_2$ 的值等于常数项，但 x_1+x_2 的值不等于一次项系数的相反数．又如第(3)题，虽然x_1+x_2 的值等于一次项系数的相反数，但 $x_1\cdot x_2$ 的值不等于常数项，故第 (2)、(3)题两个方程后面的数不都是该方程的根．

布置作业：略．

教案说明

设计这份教案的基本指导思想是，让学生参与韦达定理的发现、不完全归纳验证以及演绎证明等整个数学思维过程．这是“数学教学主要是数学活动的教学”这一教育思想的具体体现．这种

反映现时代精神的教育思想有利于提高学生的数学思维能力，教学活动也比较生动活泼，能有效激发学生思维的积极性.

通常拟采取让学生通过比较多的题目的求解，在观察、归纳中发现一元二次方程的根与系数间的关系. 本教案仅选一个解方程的题目，这样，学生发现的难度提高了，但数学思维品质也相对提高了. 实践证明，只要教学语言使用得当，问题情境设计得好，学生是能够从一个题目中去获得发现的.

可化为一元二次方程的分式方程的解法

韩　柔（山西省实验中学）

作者简历



韩柔　山西交城县人，1955年毕业于省教干校数学科，分配到太原第十中学（现改为省实验中学）任教至今．1987年被评为中学高级教师．曾任数学教学研究会理事，市中心教研组组长、成员，市级评委等．1982年获教学改革一等奖，1984年再次获得教学改革一等奖，并获市优秀教师称号和市政府颁发的"成就显著证书"，1985年获市教学能手，省劳动竞赛委员会荣记一等功．

教学目的

(1) 正确而熟练地掌握分式方程的两种基本解法，即去分母法、换元法；进一步理解解分式方程时验根的必要性．

(2) 通过用换元法、去分母法解分式方程的实践，培养学生的数学思想．

教学过程

一、复　　习

通过一元二次方程的研究、学习，为进一步学习分式创造了条件，在学习新课之前，我们先复习下面几个问题：

(1) 分式方程的定义；

(2) 方程同解原理 1、2；

(3) 解分式方程的一般步骤；

（分式方程的定义、解分式方程的一般步骤可让学生阅读有关教材，同解原理可由一个学生回答.）

(4) 解一个分式方程（可化为一元一次方程的）：

$$\frac{6}{y+2}+\frac{y+2}{2-y}+\frac{y^2}{y-4}=0.$$

（两个学生在黑板上解，其余学生在下做，板演的同学若有错误时，可先用矩形框起来后再修正错误．下面同学解的错误可采取同样的方法处理，最后统计错误的种类和人数，其错误的原因还是让做错的同学自己说明并改正为好.）

书写格式如下：

解

$$\frac{6}{y+2}+\frac{y+2}{2-y}+\frac{y^2}{y^2-4}=0. \qquad ①$$

整理得

$$\frac{6}{y+2}-\frac{y+2}{y-2}+\frac{y^2}{(y+2)(y-2)}=0. \qquad ②$$

两边同乘以 $(y+2)(y-2)$，约去分母，得

$$6(y-2)-(y+2)+y^2=0. \qquad ③$$

去括号、合并同类项，得

$$y=8. \qquad ④$$

检验：把 $y=8$ 代入所乘的式子中，

即 $$(y+2)(y-2)=10\times 6=60\neq 0.$$

$$\therefore\quad y=8\text{ 是原方程的根.}\qquad ⑤$$

解法中，由①到②是在同样允许值的范围前提下的恒等变形，显然不会破坏方程的同解性，所以①到②是同解变形．而由②到③是方程两边同乘以最简公分母$(y+2)(y-2)$，它是一个含有未知数的整式，故不能保证同解，这一点是解分式方程的关键所在，也是验根的必要所在，这里应深入浅出地给学生说明白．

二、研 讨 新 课

［例 1］ 解方程：

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}=1.$$

解 原方程可化为

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x-2}=1.$$

方程两边同乘以$(x+2)(x-2)$，约去分母，得

$$(x-2)+4x-2(x+2)=(x+2)(x-2),$$

即

$$x^2-3x+2=0.$$

解这个一元二次方程，得

$$x_1=1,\ x_2=2.$$

检验：把$x_1=1$代入$(x+2)(x-2)$，其值不为零，

$\therefore$ $x_1=1$是原方程的根．

把$x_2=2$代入$(x+2)(x-2)$，其值为零，

$\therefore$ $x=2$是增根．

$\therefore$ 原方程的根是$x=1$．

（这个例题由两个同学同时上黑板做，其余同学在下面解，最后由一位同学小结．）

在我的教案中有这样一个记载：

生甲：解： $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}-\dfrac{2}{x-2}=1,$

约去分母，得 $$(x-2)+4x-2(x+2)=1.$$

整理得 $$x=\frac{7}{3}.$$

检验：把 $x=\frac{7}{3}$ 代入 $(x+2)(x-2)$ 中，其值不为零，

$$\therefore\quad x=\frac{7}{3}\text{ 是原方程的解.}$$

学生误认方程右边是零了，或者说注意了约去分母，却忘了要在方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$.

开始教学时，可以在“约去分母”这四个字后面标上一个红色的问号“?”，以引起学生的注意，养成验根的习惯.

“分式方程为什么必须验根?”关于这一点可让学生议一议，这是大有好处的. 教育学上把它称为“蜂音”就是这个道理. 在我四十年的教学生涯中有一点深刻的体会，这就是“三点”让学生议，即重点、难点、疑点让学生议.

[例 2] 解方程：

$$2\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)+6\left(\frac{x+1}{x+1}\right)=7.$$

解 方程两边同乘以 $(x^2+1)(x+1)$，得

$$2(x^2+1)^2+6(x+1)^2=7(x^2+1)(x+1).$$

(这时可以提问同学，是展开好还是不展开好. 结论是不展开好.)

整理得

$$2(x^2+1)^2-7(x^2+1)(x+1)+6(x+1)^2=0.$$

左边分解因式得

$$[2(x^2+1)-3(x+1)][(x^2+1)-2(x+1)]=0.$$

$$\therefore\quad 2(x^2+1)-3(x+1)=0,\ (x^2+1)-2(x+1)=0,$$

即 $$2x^2-3x-1=0,\ x^2-2x-1=0.$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4},\ x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4},$$

$$x_3=1+\sqrt{2},\ x_4=1-\sqrt{2}.$$

经检验，x_1、x_2、x_3、x_4 都是原方程的根.

方程左边 $\frac{x^2+1}{x+1}$ 与 $\frac{x+1}{x^2+1}$ 是倒数关系，所以可利用换元法解.

设 $\frac{x^2+1}{x+1}=y$，则原方程可化为

$$2y+\frac{6}{y}=7.$$

两边同乘以 y，得

$$2y^2+6=7y,$$

即

$$2y^2-7y+6=0.$$

解得

$$y_1=\frac{3}{2},\ y_2=2.$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+1}{x+1}=\frac{3}{2},\ \frac{x^2+1}{x+1}=2,$$

即

$$2x^2-3x-1=0,\ x^2-2x-1=0.$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{3+\sqrt{7}}{4},\ x_2=\frac{3-\sqrt{7}}{4},$$

$$x_3=1+\sqrt{2},\ x_4=1-\sqrt{2}.$$

检验：分别把 x_1、x_2、x_3、x_4 代入 $(x+1)(x^2+1)$，其值均不等于零，所以，原方程的根是

$$x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4},\ x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4},$$

$$x_3=1+\sqrt{2},\ x_4=1-\sqrt{2}.$$

(利用换元法解方程主要有两个目的：一是化繁为简；二是避免出现新的不会解的方程．例如，本题把 $2(x^2+1)^2-7(x^2+1)(x+1)+6(x+1)^2=0$ 的左边展开是一个四次方程，解这个方程学生会碰到新的困难．换元是转化问题的关键，应该帮助学生学会简

单的换元方法.）

三、练　　习

把下列方程换元:

1. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x-1}\right)+6=0.$

$\left(\text{设 } \frac{x}{x-1}=y\text{, 则原方程化为 } y^2-5y+6=0.\right)$

2. $\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5}{2}.$

$\left(\text{设 } \frac{x^2-1}{3x}=y\text{, 则化为} \frac{1}{y}+y=\frac{5}{2}\right).$

3. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=1,$

（$\because\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$

$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$

设 $x+\frac{1}{x}=y$, 则原方程可化为 $2(y^2-2)-3y-1=0.$）

4. $x^2+x+1=\frac{2}{x^2+x}.$

（设 $x^2+x=y$, 则原方程可化为 $y+1=\frac{2}{y}.$）

四、联系与新探

1. 出两个题目，不作任何说明和提示让学生完成. 可以先让一个同学上黑板完成第一题，再让一个同学上黑板完成第二题.

1. 化简分式:

$$\frac{3x-1}{x+1}+\frac{2-x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}.$$

$$\text{原式}=\frac{(3x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x+1)(2-x)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{3x^2-x-3x+1-x^2-x+2x+2-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x-1}{x+1}.$$

2. 解方程:

$$\frac{3x-1}{x+1}+\frac{2-x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0.$$

由上面化简,知原方程为

$$\frac{2x-1}{x+1}=0.$$

两边同乘以$(x+1)$,得

$$2x-1=0.$$

解这个方程,得

$$x=\frac{1}{2}.$$

经验根,原方程的根是 $x=\frac{1}{2}$.

这和直接化去分母的解法一样,可以得到正确的结果. 这说明可以先对分式进行恒等变形,然后解分式方程.

2. 解分式方程的新探:本题供学生辨析、讨论.

解方程 $$\frac{3x-1}{x+1}+\frac{2-x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0.$$

解 方程左边化简,得

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)}=0,$$

即 $$\frac{2x-1}{x+1}=0.$$

由分式的定义知,这个分式的值为零的必要条件是分子

$$2x-1=0.$$

从而解得

$$x=\frac{1}{2}.$$

又由分式的值为零的充分必要条件是分子为零而分母不为零,这里所指的分母是约分以前的分母,即$(x+1)(x-1)$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，

显然 $$(x+1)(x-1)\neq 0.$$

$\therefore\quad x=\frac{1}{2}$ 是方程的根.

若本题稍作更改，改成：

$$\frac{3x-1}{x+1}+\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=0,$$

则等式左边可整理成为

$$\frac{3(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}.$$

约分得

$$\frac{3(x-1)}{2(x+1)}.$$

解方程 $\frac{3(x-1)}{2(x+1)}=0$，得

$$x=1.$$

$x=1$ 能使约分后的分子为零而分母不为零，但对约分前的分式来说，$x=1$ 同时使分子、分母为零，因而 $x=1$ 仍只能算是增根. 原方程没有根.

教 案 说 明

(1) 本教案是我多次教学实践的记载. 我曾在教学上总结了一些体会，其中有所谓的"五让教学"，即书本让学生读；创见让学生讲；三点(重点、难点、疑点)让学生议；规律让学生找；总结让学生写.

本教案也运用了其中的几让，使学生主动求学.

(2) 本教案的基本部分是前三段. 第四段联系与新探是指联

系前面已学知识进行解题实践，并在实践中有所探索．其中探索部分所考察的方程虽然解法不难，但突出了“分式值为零的充分必要条件是分子为零，分母不为零”．由于前后两个例子在形式上比较接近而结果却不同，因而教学意义就更大．教学时要先讲透前一题，然后强调对题目稍作更改后可能出现的情况．本教案内容可分两教时完成．

(3) 关于 $x=1$ 是否为方程

$$\frac{3(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}=0$$

的根的问题，在后续的课程中可能有不同的理解，因

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}=0,$$

因而有时也认为 $x=1$ 时，

$$\frac{3(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}=0,$$

但这是研究函数极限时碰到的问题．对于初中学生来说，分式方程

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0$$

的根[$P(x)$、$Q(x)$ 是多项式]，就是 $P(x)=0$，而 $Q(x)\neq0$ 时的 x 的值，没有例外．这正如在涉及复数以前，对于方程 $ax^2+bx+c=0$ (a、b、c 是实数，$a\neq0$)，在 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，我们就说没有根一样．

无理方程的解法

马秉钺（河北省临漳中学）

作者简历



马秉钺　河南浚县人，1961年毕业于河北省保定师范学院，同年任河北临漳中学数学教师．1987年被评为中学高级教师，1990年被评为河北省中学特级教师．现任临漳中学数学教师、副校长，临漳县政协常委．

教学目的

使学生理解无理方程的概念；掌握无理方程的基本解法；理解解无理方程需要验根，并掌握验根的方法．

教学过程

师：请同学们考虑这样一个问题：有一块直径为5厘米的半圆形铁板，以直径为斜边，怎样截出一个面积为6平方厘米的直角三角形形状的零件毛坯？

设一条直角边的长为x厘米，则另一条直角边的长为$\sqrt{5-x^2}$厘米，因为直角三角形面积为6平方厘米，所以可列出方

程

$$\frac{1}{2}x\sqrt{5-x}=6.$$

这是什么方程呢?是我们以前学过的方程吗?

(有同学在窃窃私语：这是一元二次方程,是一元……但很快否定了.)

[一开始就提出问题,能引起学生的注意和学习兴趣. 解决一个问题,对学生来说就是一种创造. 如果问题获得解决,就能强化进一步学习的动机;如果思维暂时受阻,他们便渴望得到老师的点拨,突破困难,这也能强化学生的求知欲.]

师：这个方程和我们已学过的方程有什么不同?

(有同学说,未知数在根号下.)

回忆我们已学过的方程:

一元一(二)次方程;简单的高次方程;分式方程.

我们把一元一(二)次方程和简单的高次方程统称为整式方程. 整式方程和分式方程统称为有理方程.

那么,根号下含有未知数的方程叫做什么方程呢?

(同学们受到启发,可以说出根号下含有未知数的方程叫做无理方程.)

(板书:根号下含有未知数的方程,叫做无理方程.)

请同学们思考、判断下面几个方程是不是无理方程?

(1) $\sqrt{x-1}=2$;

(2) $\sqrt{7}x^2+\sqrt{3}x+2\sqrt{2}=0$;

(3) $\sqrt{x-6}-2x+3=7$;　(4) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}=3$.

解答略.

[从实践中认识无理方程,在对比中认识无理方程,有利于学生理解无理方程的概念.]

师：我们再考虑第二个问题：怎样解无理方程?回忆学过的

方程的解法．解简单的高次方程的指导思想是“降次”，使之化为一元一次方程或一元二次方程；解分式方程的指导思想是“去分母”，使之化为整式方程．我们总是把新方程化为我们已学过的方程的形式，使问题得以解决．

那么，怎样解无理方程呢？

（同学们能直觉想到：应该化为有理方程．）

[在学习过程中，要不断对知识进行归纳、总结，使之系统化．学习知识的过程是一个不断同化和顺应的过程，用旧知识感知新知识的过程．通过对学过的方程的归类及解法的总结，引出无理方程的概念，并在归纳、类比中，引导学生直觉思维，于是，又进入一个新的问题情景：“猜想”和“论证”的矛盾，使学生的思维又一次进入高潮．]

师：现在，我们研究一下，怎样把无理方程化为有理方程，从而解无理方程．

[例1]　解方程$\sqrt{3x+2}=2$.

解　由题意知，2是$3x+2$的算术平方根，所以

$$2^2=3x+2,$$

这就相当于把方程两边平方．

整理得

$$3x-2=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2}{3}.$$

[通过方程两边平方的方法，把无理方程化为有理方程，“猜想”初步得到证实．现在暂不提对根的检验，因为学生还没有感性认识，没有认识到验根的必要性．]

[例2]　解方程$\sqrt{x\ +5x+1}-2x+1=0$.

解　移项，把被开方数中含有未知数的根式放在方程的一边，其余各项移到另一边，得

$$\sqrt{x\ +5x+1}=2x-1.$$

两边平方，得

$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1.$$

整理得 $$3x^2-9x=0.$$

解得 $$x_1=0,\ x_2=3.$$

[例3] 解方程$\sqrt{x\ +5x+1}=1-2x$.

师：这个方程两边平方后所得有理方程，和例2方程两边平方后所得有理方程相同，所以解出的两根也应一样. 那么，$x_1=0$，$x_2=3$是例2方程的根，也是例3方程的根，大家议论一下，这个结论对不对？怎么解决这个问题？

我们可以把x_1、x_2的值分别代入两个方程检验.

先把$x_1=0$，$x_2=3$代入例2方程的两边.

把$x=0$代入例2方程的两边，得

左边$=\sqrt{0\ +5\times0+1}=1$，右边$=2\times0-1=-1$.

所以，$x=0$不是例2方程的根，是增根，应舍去.

把$x=3$代入例2方程的两边，得

左边$=\sqrt{3\ +5\times3+1}=5$，右边$=2\times3-1=5$.

所以，$x=3$是例2方程的根.

因此，例2方程的根是$x=3$.

再把$x_1=0$、$x_2=3$代入例3方程的两边检验，$x_1=0$是例3方程的根，而$x_2=3$是增根.

解无理方程为什么会出现增根呢？回想我们解方程的过程，为了化无理方程为有理方程，曾把方程两边同次乘方. 方程两边同次乘方，所得方程不一定和原方程同解，可能产生增根，所以解无理方程必须检验，检验解有理方程所得的根是不是原方程的根. 检验是解无理方程的必要步骤. 所以，例1还没完成，还应该补上检验这一步骤.

把$x=\dfrac{2}{3}$代入原方程，得

左边$=\sqrt{3\times\frac{2}{3}+2}=2$，右边$=2$.

所以，$x=\frac{2}{3}$是原方程的根.

[关于解无理方程必须验根，有两种处理方法：一种是根据方程同解变形的两个定理，告诉学生：方程两边同次乘方，所得方程和原方程不一定是同解方程，可能产生增根，因而必须验根；另一种是以先通过感性材料，让学生感知、分析、概括，达到对解无理方程必须验根的认识．我采用第二种处理方法．通过例2、例3两个无理方程化为有理方程后，成为同一个方程，引起学生的悬念，再回到方程同解变形定理，说明方程两边同次乘方可能产生增根，悬念释然，加深学生对解无理方程必须验根的认识.]

[例4] 解下列方程：

(1) $\sqrt{2x+7x}-2=x$;

(2) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$.

解略.

现在，我们来解一开始提出问题时所得的方程：

$$\frac{1}{2}x\sqrt{5^2-x^2}=6.$$

解 把方程两边平方，并整理，得

$$x^4-25x^2+144=0.$$

这是上一节学过的简单的高次方程，用换元法可以求解．请同学们自己解完这一方程.

现在，请同学们做以下练习.

解下列方程：

(1) $x+\sqrt{x-2}=2$; (2) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=3$;

(3) $\sqrt{x^2+3x+6}=-4$; (4) $\sqrt{x+1}+3=2$.

[(3)、(4)两个方程是课本的练习题．课本上的题是这样的：(口答)下列方程是否有解？为什么？按课本上的问法，学生比较容

易回答，因为题目本身已经有所暗示：此方程无解，只需找出无解的理由即可．改造成解方程的形式的目的是：通过这两道题培养学生的观察、分析的习惯和能力，防止学生程式化解方程的学习方法，即见到无理方程，不注意观察、分析，就套用解题步骤．可能有些学生即刻判断出方程无解，而有一些学生则盲目按解无理方程的步骤求解，结果解出的都是增根，原方程无解．这时再给以点拨，可以加深学生的认识．]

教案说明

无理方程这一单元共三课时，这是第一课时．第二课时是用换元法解无理方程，加深对解无理方程的认识．第三课时是练习课，巩固知识，形成技能、技巧．

本单元的重点是解无理方程．方程同解性的研究，不是重点．通过实例让学生知道解无理方程可能产生增根，因此必须检验．对于学生程度较好的学校，适当讲一些产生增根的原因，也是有好处的．

“数学教学是数学活动的教学”．我们进行数学教学，不能只给学生讲结论，因为任何数学理论总是伴随着一定的数学活动，应该暴露数学活动的过程．也只有在数学活动的教学中，学生学习的主动性，才能得以发挥．这一节课，从无理方程的产生到无理方程的解法以及验根等，不是简单地告诉学生结论和方法，然后进行大量的重复性的练习，而是在教师的指导下，让学生自己去思索、判断，自己得出结论，从而达到培养学生观察、分析、判断、归纳能力的目的．

简单的二元二次方程组解法小结

邵铭心（北京市第110中学）

作　者　简　历



邵铭心　江苏南京市人，1952年毕业于山东齐鲁大学天文数学系，同年任北京大学附设工农速成中学数学教师．1988年被评为北京市中学高级教师．现任北京市第110中学数学教师．

教学目的

(1) 使学生系统掌握二元二次方程组的解法．

(2) 加深学生对同解变形的理解．

教学过程

师：我们学习了"简单的二元二次方程组"，通过课本里的几个例题，同学们已经知道：

(1) 简单的二元二次方程组有两种类型：第一种类型是由一

个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组；第二种类型是由两个二元二次方程组成的方程组.

(2) 解简单的二元二次方程组，通常用代入法、加减法或者用因式分解法等进行消元或降次；对于某些具有特殊形式的方程组，还可以用换元法或其他方法来解.

这堂课将对二元二次方程组的解法做一个小结. 大家先做下面的例题.

（出示小黑板.）

[例 1] 解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 3x-2y=11, \\ 2x+3y=16; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y-1=0, & ① \\ 2x-y-1=0; & ② \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12. \end{cases}$

师：解这三道题，可以分别采用哪种方法？

生甲：例 1(1) 可以用加减消元法.

生乙：例 1(2) 用代入消元法，将其中方程 ② 变形为 $y=2x-1$，再代入到方程 ① 中去，使方程 ① 变为关于 x 的一元二次方程，然后从这个方程中求出 x 的值.

师：解出 x 的值后，如何求 y 的值？

生：代入方程 ② 即可求出 y 的值.

师：为什么不代入方程 ① 呢？

生：因为方程组的解，是方程 ① 与 ② 的公共解. 因此方程 ① 与 ② 哪一个简单，计算方便，就代入那个方程求解.

师：用什么方法解例 3？

生甲：可以用代入消元法.

生乙：也可以应用韦达定理的逆定理，将 x、y 看成某一个一

元二次方程的根，通过解这个一元二次方程求 x、y 的值.

师：下面再看三道例题，大家先想想，然后可以相互讨论一下. 同学们只要回答出解题的步骤就行了.（出示小黑板.）

[**例 2**]　解下列方程组：

(1) $\begin{cases}(x-2y)^2-4(x-2y)+3=0, & ①\\ x-y-2=0; & ②\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(x+2y)^2+3(x+2y)-88=0, & ①\\ xy+y^2+3y-24=0; & ②\end{cases}$

(3) $\begin{cases}(x+4y-7)(x-2y+1)=0, & ①\\ (x-3y)(x+2y)-3(x-3y)=0. & ②\end{cases}$

生甲：例 2(1) 中，方程 ① 的左边，可以分解为两个一次因式的积，即 $(x-2y-1)(x-2y-3)$. 它分别与方程 ② 组成两个二元一次方程组：

$$\begin{cases}x-2y-1=0,\\ x-y-2=0;\end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases}x-2y-3=0,\\ x-y-2=0.\end{cases}$$

解这两个二元一次方程组就可以得到原方程组的解.

生乙：例 2(2) 中的方程 ① 也可化为两个二元一次方程，即 $x+2y+11=0$ 和 $x+2y-8=0$，它们与方程 ② 分别组成两个第一类型的二元二次方程组. 解这两个二元二次方程组就可以得到原方程的解.

生丙：例 2(3) 中，方程 ① 和 ② 都可转化为两个二元一次方程，从而可以分别组成四个二元一次方程组，解这四个二元一次方程组就可以得到原方程的解.

师：从上面三道例题可以看到，通过因式分解可以达到"降次"的目的，尤其对于解第二种类型的二元二次方程组，因式分解不失为是一种较好的解题方法. 但是同学们需要十分注意，在组成方程组时，要搭配得当，否则是会出错的.

[解第二种类型的二元二次方程组比较困难，教师可引导学

生，根据题目特点，抓住“消元”和“降次”这两个基本思想，灵活选用合理的方法.]

师：下面，请大家看第三个例题.

(出示小黑板.)

[例 3] 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2+2x+y+2=0, \\ 2x^2-4xy-2y^2+3x+3y+4=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2+2x-3y+2=0, \\ x^2+3xy-y^2+2x+3y-2=0. \end{cases}$

生甲：例 3(1) 的两个方程的二次项系数对应成比例，因此用加减法可以得到一个二元一次方程. 解由这个二元一次方程和原方程组中的任何一个二元二次方程所组成的方程组就可以得到原方程组的解.

生乙：例 3(2) 的两个方程中，含 y 的项的系数对应成比例，用加减法可以得到一个只含未知数 x 的方程，解这个方程求出 x，再代入原方程组的任何一个方程，就可求得 y.

师：再请同学们看看下面的方程组有什么特征？

(板书.)

[例 4] 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29, \\ 7x^2-8xy+7y^2=43; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+xy-2x-4y-8=0, \\ x^2+xy+y^2-3x-6y-12=0. \end{cases}$

生甲：例 4(1) 的两个方程都不含未知数的一次项，因此设法消去常数项后可得到形如 $ax^2+bxy+cy^2=0$ 的方程，将这个方程的左边分解为两个一次因式的积，这样，原方程组可以化为两个第一类型的二元二次方程组来解，从而求出原方程组的解.

生乙：例 4(2) 的两个方程的非二次项系数对应成比例，因此

可以通过变形使得其中一个方程的非二次项系数为零，得新方程组，然后解之，解法与例4(1)相同.

师：（总结）从上面的例题中可以看出，在解方程组时，使用"降次"方法的灵活性较大，但其类型不外乎：一个方程可分解为两个一次方程，如例2(1)、(2)、(3)；或消去非二次项后，得到一个能分解为两个二元一次方程的二元二次齐次方程，如例4(1)、(2). 下面，同学们一起来做课堂练习.

请同学们讲出应用哪些解题方法就可将下述题目转化为前面例题的类型？

（出示小黑板.）

1. $\begin{cases} x+2y=4, & ① \\ 2xy=-2. & ② \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2=9, & ① \\ xy+y^2=2. & ② \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x-1)^2+(2y-3)^2=4, & ① \\ x+2y=6. & ② \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy+x+y=5, & ① \\ x^2+y^2-x-y=2. & ② \end{cases}$

零指数与负整数指数幂的概念

高光煌（安徽安庆市教学研究室）

作者简历



高光煌 安徽安庆市人，1963年毕业于安徽师范大学数学系，同年任安庆市第九中学数学教师，后调入安庆市教师进修学校. 1988年6月被评为高级教师. 曾荣获安庆市先进工作者，安庆市科技先进工作者. 现任安庆市教研室数学教研员，安庆市教育学会数学教研会秘书长.

教学目的

(1) 使学生理解零指数与负整数指数幂的概念并能正确进行运算.

(2) 结合教学内容培养学生分析问题、解决问题的能力.

教学过程

一、引出课题——零指数幂

师：同学们，我们已经学过正整数指数幂，现在请同学们打开

课本，仔细阅读课本“零指数”这一段，并请一个同学回答我下面提出的问题：为什么要引进零指数，并规定$a^0=1$？

生：为了使被除式的指数等于除式的指数时，同底数幂除法的运算性质也能适用，我们规定

$$a^0=1.\ (a\neq 0)$$

师：回答得好！虽然这一回答基本是按课文来叙述的，但它已经明确地告诉我们，为了把$a^m\div a^n=a^{m-n}$这一运算性质扩大到包括$m=n$时的情况，我们要作一个规定，即

$$a^0=1.\quad (a\neq 0)$$

谁能说一说这一规定的意义。

生：它的意义是任何数的零次幂等于1.

师：是这样吗？0^0也等于1吗？

生：噢，不对了．a应该是任何不等于零的数．

师：更正确的说法是“任何不等于零的实数的零次幂等于1”．

[这里引入新课，不采用“先仔细复习正整数指数幂及其五条运算性质，随后引入零指数幂”的通常做法，而是开门见山地向学生展示教学目标，将正整数指数幂的运算性质的复习串插在零指数幂概念形成和它的合理性验证等过程中．其目的是想让学生在上课一开始，便明确本节课的主题，从而将学生的注意力吸引到如何建立零指数幂的概念上来．]

二、验 证 性 质

师：规定了$a^0=1(a\neq 0)$后，使$a^m\div a^n=a^{m-n}$对$m=n$的情况也适用了．现在请同学们考虑一下，规定了$a^0=1(a\neq 0)$后，正整数指数幂的其他几条运算性质是否对m或n为零时同样也成立呢？

大家先想一想，正整数指数幂的运算性质除了第(2)条外，还

有哪儿条？

生甲：正整数指数幂的运算性质除第(2)条外，还有

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;　　　　(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

（学生甲犹豫了一会儿，想不起正整数指数幂的第(4)、(5)条运算性质了.）

师：看谁能记得起来？

生乙：(4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$　$(b \neq 0)$.

师：不错！大家再想一想，要分析上述四条运算性质是否对 m 或 n 为零时同样成立，应分几种情况来考虑？

生：应分"m、n中只有一个为零"及"m、n 均为零"两种情况来考虑.

师：不错！由于时间关系，我不打算对此加以进一步的分析验证了，只给同学们一个正确的结论，即上述四条运算性质对 m 或 n 为零时同样成立，请同学们在课后给予验证. 通过刚才的学习，我们可以得出这样的结果："正整数指数幂的运算性质当指数为零时也照样适用".

三、类比迁移，引出负整数指数幂

师：刚才我们花了不少时间讨论了零指数幂，这是十分必要的. 同学们能否根据已有的经验，考虑一下如何定义负整数指数幂. 即当 $a \neq 0$, p 为正整数时，$a^{-p} = ?$ 请大家把结论写在练习本上.

（学生讨论，教师巡视.）

生(众)：$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $(a \neq 0$, p 为正整数$)$.

[如果学生未能很好理解零指数幂概念或班级学生程度较差，

建立负整数指数幂还得像建立零指数幂那样，从具体到抽象、从特殊到一般，加以讲解.]

四、巩固概念

师：现在请同学们做一些课堂练习，巩固今天所学的知识.

1. 指出下列等式成立的条件：

(1) $(x-1)^0=1$(　　　　);

(2) $(x+2)^{-2}=\frac{1}{(x+2)^2}$(　　　　).

2. 计算

(1) 10^{-3};　　(2) $(-3)^{-2}$;

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;　　(4) $5^0\times 2^{-1}$.

3. 判断"零的任何次幂都是零"这一结论的正确性.

4. 计算：

(1) $\left[3\cdot 6^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}\cdot(4^0+3^0+1^{-1})$;

(2) $(x^{-2}\cdot y^{-2})^{-2}\div\left(\frac{y}{x}\right)^{-4}$.

（学生在课堂上演算，教师巡视指导，而后让学生把演算过程板演出来.）

五、共同小结

师：这节课研究了什么？

生：零指数与负整数指数幂的意义.

（师生共同复述定义，教师强调定义中 $a\neq 0$ 的条件.）

师：在今天这节课中我们再次学习了幂 a^n. 确切地说，我们将 a^n 中的 n 由正整数扩展到整数了. 通过给零指数、负整数指数幂下定义，使正整数指数幂的运算性质也能适合零指数与负整数指数幂的运算，而且由于有了负整数指数幂的概念，原来的五条运算性质可以加以合并，大家考虑一下只需保留哪几条性质呢？

生：只需保留(1)、(3)、(4)三条运算性质.

师：太好了！应用时只要记住三条就可以了. 这就是拓广了正整数指数幂为整数指数幂后所带来的好处. 我们还可以更进一步把指数从现在的整数范围扩展到有理数范围. 同学们，你们有兴趣去探索吗?!

布置作业(略).

教案说明

(1) “指数”这部分内容无论对于数学的后继学习(如学习对数)还是对于学习物理、化学都很重要. 而学好这部分内容的关键是把几种指数幂的定义讲深讲透. 只要学生把握了各种指数幂的意义，指数运算就不难进行了.

(2) 零指数幂和负整数指数幂是通过规定来明确其意义的，这种定义没有不可之处. 按道理，作为一个新的概念的定义，不必追究它的来源，就像给新生孩子取名一样. 但在教学中，让学生了解作出这样规定的原因及其合理性，有利于学生了解这样两个基本事实：一是数学符号的意义是可规定的；二是每一个规定必须是合理，不是任意的. 合理性包括两个方面：其一是它不能与以往的概念和理论相矛盾；其二是规定的作出有利于解决问题，开拓新的知识领域.

(3) 对概念意义所作规定的合理性一般不容易讲清楚，我们主张把所要讲述的道理分解成一个个的小问题，让学生通过解决小问题来认识道理. 对于一时无法说清的意思不必强行去说，可以通过让学生看书或适当的讨论来加以认识. 学生讨论时，教师千万别把问题提得过于玄虚，免得学生钻牛角尖而使问题复杂化.

对 数 概 念

楼良茂 （浙江义乌中学）

作 者 简 历



楼良茂　浙江义乌人，1954年毕业于浙江师范学院数学科，同年任地质部宣化地质学校教师．1959年毕业于教育部教师进修学院数学系，1962年任义乌中学数学教师．1987年被评为浙江省中学高级教师．1989年被金华市委和市府授于中青年专业技术拔尖人才称号．现任义乌中学党总支书记，金华市教育学会理事，金华市数学会副会长，义乌市科协常委兼数学会会长，义乌市教育学会副会长等职．

教 学 目 的

使学生理解对数概念，明确指数式与对数式之间的关系，掌握对数式与指数式的互化．

教 学 过 程

一、温故引新

师：请同学们看黑板上的三道题目，指出它们是求什么的运算，并求出结果：

(1) 求 2^3；　　　　(2) 已知 $2^x=8$，求 x；

(3) 已知 $2^x=5$，求 x.

生：(1) $2^3=8$，这是已知底数和指数求幂的运算.

(2) $\because\ 2^3=8$，$\therefore\ x=3$，这是已知底数和幂，求指数的运算.

(3) 解不出，但它也是已知底数和幂，求指数的运算.

(其他学生也面呈难色，一时无法解出第(3)题.)

师：看来同学们对解第(3)题都有些困难. 既然都是已知底数和幂求其指数的运算，而且数字都很简单，为什么第(3)题解起来就困难了呢？问题是靠同学们原先掌握的知识已不够用了，要顺利地解出这样的题目，还需要我们学习新的知识. 这新的知识就是我们今天要讲授的"对数".

二、讲授新课——对数

师：同学们可以发现上面三道题目涉及两类问题：一类是问"一个数 a 的 b 次幂等于多少？"这就是第(1)题所属的类型. 对这类问题，我们可以采用指数式 $a^b=N$ 来表示. 另一类是这类问题的反问题，它是问"一个数 a 的多少次幂等于 N？" 或者说"N 是 a 的多少次幂？"例如：2 的多少次幂等于 16？或者说，16 是 2 的多少次幂？

生：2 的 4 次幂等于 16.

师：很好！这就是已知底数以及幂求指数的问题. 对这类问题，可以采用一个新的式子来加以表示，即，

$$\log_2 16=4.$$

这里 4 叫做以 2 为底的 16 的对数，2 仍叫做底数，16 叫做真数.

（出示小黑板.）

一般地说，如果 $a(a>0,\ a\neq1)$ 的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，数 b 就叫做以 a 为底的 N 的对数，记作 $\log_a N=b$，其中 a 叫做底数（简称底），N 叫做真数.

通常，我们称式子 $\log_a N=b$ 叫对数式. 可以发现，对数式中的对数 b，就是对应的指数式 $a^b=N$ 中的指数.

在对数式 $\log_a N=b$ 中，对底数 a 有这样两个规定，即

$$a\neq1,\ a>0.$$

请同学们考虑一下，为什么要规定 $a\neq1$？ 在 $a^b=N$ 中，若 $a=1$，会出现什么情况呢？

生：若 $a=1$，对于任意实数 b，总有 $a^b=1$，这样，1的对数就不确定了，问题也就失去了意义.

师：不错！我们现在再来考虑一下规定底数 $a>0$ 是否有必要呢？

生甲：我看没有必要！如 $a=-8,\ b=\frac{1}{3}$，不是有

$$(-8)^{\frac{1}{3}}=-2,\text{即有}\log_{(-8)}(-2)=\frac{1}{3}.$$

师：生甲会动脑筋，他认为在对数定义中不必限制底数 $a>0$，那么是课本上的规定有问题，还是生甲看法有问题呢？

生乙：生甲所举的例子是不错的，但仅从一个例子就认为在对数定义中规定底数 $a>0$ 没有必要，就有片面性. 例如，$a=-8,\ b=\frac{1}{2},\ a^b=(-8)^{\frac{1}{2}}$就没有意义，对数也就不存在了.

师：生乙讲得好！说明当 $a<0$ 时，并不能保证 a^b 为实数，从而也不能保证所有对数有意义. 若 $a=0$，在 $a^b=N$ 中会变得怎样？

生丙：不管 b 是怎样的非零正数，都有 $N=0$.

师：（追问）会出现 $N\neq0$ 的情况吗？

生丁：若 $N\neq0$，b 就不存在.

师：对！这说明当 $a=0$ 时，对数 b 或者不存在或者不唯一．通过刚才对 $a=1$ 及 $a\leqslant 0$ 的情况讨论后，我们可以知道，为了保证指数式 $a^b=N$ 能转变为对数式 $b=\log_a N$，必须规定

$$a\neq 1 \quad 且 \quad a>0.$$

（学生此时已初步明确了对数的定义，教师进一步引导学生对概念的理解．）

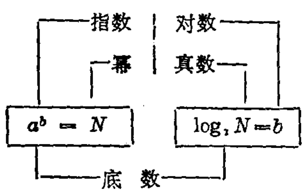
师：指数式 $a^b=N$ 与对数式 $\log_a N=b$ 中的三个数 a、b、N 之间的关系，当 $a\neq 1$，$a>0$ 时可以互相转化．即

$$\log_a N=b \overset{a\neq 1,\ a>0}{\Longleftrightarrow} a^b=N.$$

零与负数有没有对数，为什么？

生：由于 $a\neq 1$，$a>0$，所以 $a^b=N$ 总是正数，即 $\log_a N=b$ 中的 N 恒大于零．

师：为了加深对对数概念的理解，我们可以用对数式与指数式之间的关系图来表达 a、b、N 间的关系：



也可以用表格形式来反映 a、b、N 间的关系：

式 子	名	称	
	a	b	N
指数式 $a^b=N$	底 数	指 数	幂 的 值
对数式 $\log_a N=b$	底 数	对 数	真 数

通过以上的直观图示，可以看出，对数式和指数式虽然反映的是两种不同的运算，但都表示 a、b、N 三个数之间的同一数量关系，这两种运算互为逆运算，在 $a>0$ 且 $a\neq1$ 的条件下，它们可以相互转化．下面，请同学们看一些例题．

[例 1]　把下列指数式写成对数式：

(1) $5^4=625$;　　　　(2) $3^{-2}=\frac{1}{9}$;

(3) $10^{-2}=0.01$.

生：(1) $\log_5 625=4$;　　　　(2) $\log_3 \frac{1}{9}=-2$;

(3) $\log_{10} 0.01=-2$.

[例 2]　把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_2 8=3$;　　　　(2) $\log_{10} 10000=4$;

(3) $\log_4 \frac{1}{2}=-0.5$.

生：(1) $2^3=8$;　　　　(2) $10^4=10000$;

(3) $4^{-0.5}=\frac{1}{2}$.

师：对！同学们回答得很好．现在我们再对对数中的 N、b 作一些归纳说明：

“N”：指数式中的幂，对数式中的真数，在 $a>0$ 且 $a\neq1$ 的前提下，它的值恒为正数．

“b”：指数式中的指数，对数式中的对数，在 $a>0$ 且 $a\neq1$ 的前提下，b 可正、可负、可为零，即可为一切实数．

[例 3]　求下列各式的值：

(1) $\log_4 4$;　　　　(2) $\log_7 1$.

生：(1) 设 $\log_4 4=x$，则 $4^x=4$.

$$\because\ 4^1=4,\quad \therefore\ x=1,$$

即

$$\log_4 4=1.$$

(2) 设 $\log_7 1=x$，则 $7^x=1$.

$$\because\ 7^0=1,\quad \therefore\ x=0,$$

即 $$\log_7 1=0.$$

师：观察这两道题目以及结果，你能发现什么吗？

生：能！$\log_a a=1(\because a^1=a)$，即底数的对数等于1.

$\log_a 1=0(\because a^0=1)$，即1的对数等于零.

师：很好！不过别忘了 $a>0$ 且 $a\neq1$ 这个条件.

三、巩固新知识

师：为了便于大家记忆、理解对数概念及某些性质，可以将其中一些性质编成顺口溜：

"底的对数等于1；1的对数就是零；零和负数无对数."

"对数里，真数正；底是正数不为1."

下面请大家做几道课堂练习题.（出示小黑板.）

1. 把下列指数式写成对数式：

(1) $10^3=1000$； (2) $7^{-2}=\frac{1}{49}$；

(3) $8^{\frac{2}{3}}=4$； (4) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

2. 把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_2\frac{1}{4}=-2$； (2) $\log_{10}0.001=-3$；

(3) $\log_8 2=\frac{1}{3}$； (4) $\log_{27}\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}$.

四、布置作业

1. 求下列各式中的 x，并指出计算 x 时是求幂、求对数、或是求方根.

(1) $3^4=x$； (2) $x^3=1000$；

(3) $10^x=0.0001$.

2. 用对数形式把下列各式中的 x 表示出来：

(1) $4^x=16$； (2) $3^x=1$；

(3) $4^x=2$； (4) $2^x=0.5$.

3．把下列对数式写成指数式，并求 x 的值：

(1) $\log_2 32=x$;　　(2) $\log_5 625=x$;

(3) $\log_{10} 1000=x$;　　(4) $\log_8 4=x$;

(5) $\log_3 \frac{1}{9}=x$;　　(6) $\log_3 3=x$;

(7) $\log_{10} \frac{1}{1000}=x$;　　(8) $\log_{16} \frac{1}{2}=x$.

4．把下列指数式改写成对数式：

(1) $(\sqrt{3})^2=3$;　　(2) $\pi^0=1$.

5．把下列对数式改写成指数式：

(1) $\log_{\frac{1}{10}} 100=-2$;　　(2) $\log_{0.5} 8=-3$.

教案说明

(1) 本教案是为中上程度或重点学校的学生设计的．教案设计中增加了一些内容，如研讨"在对数定义中为什么要规定 $a\neq1$, $a>0$"等问题．对学生程度较差的班级，上述内容可删去，但在谈到对数定义以及进行指数式 $a^b=N$ 与对数式 $b=\log_a N$ 的互化时，一定要反复强调条件"$a\neq1$, $a>0$".

(2) 对数概念比较抽象，它的引入需要经过由特殊到一般的过程．但所选的范例不能都过于特殊或容易．否则，体现不出学习对数的必要性与重要性，不能激发学生学习对数的兴趣和求知欲．为此，本教案增加了"求 $2^b=5$ 中 b"的问题．当学生对问题感到束手无策时，教师便顺势告诉学生：这就是今天要学习的新知识——对数．这样，学生就觉得新知识的引入既自然又必要了．

函数概念

岑　申（浙江宁波市教委教研室）

作者简历



岑　申　浙江慈溪人，1964年毕业于浙江师范大学数学系，曾任浙江慈溪逍林中学校长．1986年被评为浙江省中学特级教师．现任宁波市教委教研室主任，浙江省数学会理事，省中学数学研究会副会长，宁波市中学数学研究会会长，省九年义务教育初中数学副主编．

教学目的

(1) 了解常量、变量以及函数的意义．

(2) 通过对常量、变量、函数概念的学习，培养学生观察、分析的能力与运动、变化的观点，进行生动具体的辩证唯物主义和爱国主义教育．

教学过程

一、提出课题

师：今天这节课，我们要学习数学中很重要的基本概念，请同学们先看第一个实际问题.

（出示小黑板.）

问题1 某粮店在某一段高峰时间内出售大米，请你们思考：在整个过程中出现哪些量，其中哪些量是变化的，有没有不变的量？

生：在卖、买米的过程中，出现米的千克数、每千克米的价格（也称单价）和总价三个量. 千克数和总价一般是随着顾客的需购量的变化而变化的，但米的单价是不变的.

师：回答得很好！下面我们再看第二个实例.

（出示小黑板.）

问题2 将一块石头投入平静的水中，你们发现水面上会出现一圈圈圆形的水波纹，并组成以石头落水点为圆心的一系列同心圆（图1）. 那么在这一变化过程中，圆的半径 r、周长 C 和面积 S 是怎样变化的呢？圆的周长 C 和直径 $2r$ 的比值会不会变化呢？

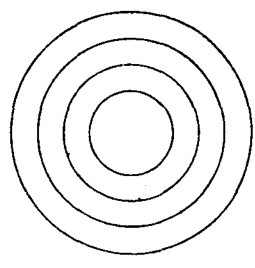


图 1

生甲：石头落水后所激起的水的同心圆的波纹中，半径 r、周长 C 和面积 S 都越变越大.

师：生甲回答了问题2的前半部分，后半部分未回答. 大家在平面几何第二册中所学过的圆周长公式，还记得吗？

生乙：记得！$C=2\pi r$，从而可知圆的周长 C 和直径 $2r$ 的比值为圆周率 π，这是一个不变的数.

师：很好！顺便提一下，关于 π 近似值的计算，是我国古代数

学的伟大成就之一．早在公元五世纪，数学家祖冲之已算得π的值在3.1415926与3.1415927之间，这比其他国家早一千多年．

[这里重提圆周率π，其目的是为了进一步加深学生对π的认识，同时，对学生进行爱国主义教育．]

师：在某一过程中可以取不同数值的量，叫做变量．如上面例子中的大米的千克数、总价，圆的半径r、周长C以及面积S．在整个过程中保持同一数值的量或数，叫做常量或常数．如上面例子中的每千克米的单价、圆周率π．

请大家注意：常量和变量不是绝对的，而是相对的，是对某一过程来说的，如在等速运动中，速度是常量，路程和时间是变量；但是，如果用不同的交通工具从甲地经过同一条路线到达乙地，那么路程是常量，速度和时间是变量．

在日常生活、工农业生产和科学实验中，常量和变量是普遍存在的，但数学所要研究的是某一变化过程中的两个变量之间的关系，即它们是怎样相互联系、相互制约的．例如，大米的千克数与总价、圆的半径与面积之间的关系，这就是我们今天要学习的数学中很重要的一个基本概念——函数．

(教师板书"函数概念"．)

[从某种意义上说，数学的教学实质上是思维过程的教学．上课开始时可以不直接提出课题，而是通过对实例的观察分析，诱发学生的求知欲望，然后揭示出新课题．这样做有利于培养学生的思维．同时，也有利于培养学生的辩证唯物主义观点．]

二、揭示概念

师：现在我们来研究什么叫函数？先观察问题1：在卖、买米的过程中，米的千克数和总价这两个变量之间有什么关系？

生：这两个变量是相互联系的，对于米的千克数的每一确定的值，米的总价都有唯一确定的值与它对应．

师：对！事实上，在卖、买米的过程中，总是先由顾客告诉营业员买米的千克数，然后由营业员告诉顾客应付的钱款(米的总价)．大家想一想：如果大米每千克单价是 0.328 元，我们用字母 n 表示大米的千克数，字母 m 表示总价，那么 n 与 m 之间存在怎样的关系式呢？

生：$m=0.328n$．

师：正确！粮店为了提高营业员的工作效率，利用这个关系式列出下表：

n (千克)	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	…
m (元)	0.328	0.656	0.984	1 31	1.64	3.28	4.92	6.56	8.20	9.85	…

营业员可以利用上表的数值，经过简单的加法，对每个顾客所买的大米的千克数 n，都能求得唯一确定的总价 m 与它对应．例如：$n=10$ 千克，$m=3.28$ 元．若 $n=16$ 千克，问 $m=?$．

生：$m=0.328+4.92\approx 5.25$(元)．

师：算得正确！

[用一些具体数字验证一下两个量的相互关系，有利于加深学生对“对应”两字的理解.]

师：现在请大家考虑：在问题 2 中，已知每一个圆的半径为 r，若要计算出它所对应的圆面积 S，可以用什么公式？

生(众)：可以用圆面积公式：$S=\pi r^2$．

师：对！在这个公式中，半径 r 可在正数范围内任意取值，对于半径 r 的每一个确定的值，圆面积 S 都有唯一确定的值与它对应．

这种变量之间的对应关系，在日常生活、工农业生产和科学实验中大量存在．下面，我们来看第 3 个问题．

问题 3 我市所属奉化溪口风景名胜点历年来接待台湾同胞的数量统计如下表.（事先写在小黑板上.）

年 份	1984	1985	1986	1987	1988	1989
人 数	391	432	1035	460	1836	2649

根据这张表，年份的值可在表内第一行各值中任意选取，并且对于年份的每一个确定的值，台湾同胞数都有唯一确定的值与它对应. 请问 1988 年来溪口的台湾同胞数为多少？

生（众）：1836 人.

师：好！我们再来看第 4 个问题.

问题 4 如图 2 是某气象站用自动温度记录仪描下的表示某一天气温变化情况的曲线.

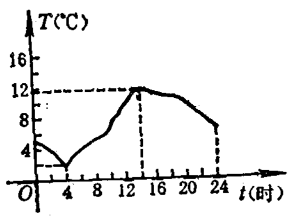


图 2

该图反映了哪两个变量之间的对应关系？

生：反映了气温 T 与时间 t 的对应关系.

师：对！根据这幅图，时间 t 的值可以从 0 时到 24 时的范围内任意选取，并且对于时间 t 的每一确定的值，气温 T 都有唯一确定的值与它对应. 请问当 $t=4$ 时，T 为何值？

生：$T\approx 2°C$.

［这里安排的四个问题，其中问题 3 是用列表法来表示函数的，问题 1 和问题 2 是用解析法来表示函数的，问题 4 是用图象法来表示函数的，这为下节课的"函数的表示法"的教学设下伏笔. 此外，问题 4 具有乡土性，有利于激发学生的学习热情.］

师：类似于这种变量间相互依存关系的例子不胜枚举，但是

上述四个问题具有一定的典型性，因此通过对这四个问题的思考，撇开其非本质东西，抓住其本质东西就能抽象出函数的概念．下面，我们先一起来思考一下上述四个问题中非本质东西是什么？

生甲：它们用来表述两个变量之间关系的方法上有所不同：前两个问题是用等式来表示的，而后两个问题分别用列表、图象来表示的．

师：生甲的回答确是这四个问题中的非本质东西，应予以肯定．大家再想一想：是否全面呢？

生乙：这四个问题，表现的现象有所不同，分别反映了日常生活、几何、气象等各种现象．

师：生乙补充得好！下面，大家思考一下这四个问题中的本质东西即提炼出函数概念来．

（学生口述，教师略作文字整理，写在黑板上．）

生丙：设在某变化过程中有两个变量 x、y，如果对于 x 的每一个确定的值，y 都有确定的值与它对应，那么就说 y 是 x 的函数．

师：生丙能够作出这样的概括已很不差了，但是大家再想想，作为函数定义是否还有缺陷，请大家回顾一下上述四个问题，再作出补充．

生丁：在上述四个问题中，前一个变量的每一个确定的值所对应的后一个变量的值都应是“唯一”的，因此在“y 都有确定……”需补充为“y 都有唯一确定……”．

师：生丁补充了“唯一”两字，很好！还需要补充吗？变量 x 的取值不受限制吗？

生丁：噢！变量 x 的取值应受限制．如问题 1 中的斤数 n 一般只取正整数；而问题 2 中的圆半径 r 只取正数．

师：对！因此对生丙讲的“如果对于 x 的……”需补充为“如果对于 x 在某一范围内的……”另外，我们可以给前一个变量 x 取名

为自变量.(板书:“自变量”,写在函数定义后.)

[从实际问题中概括出数学问题,这是培养学生数学抽象概括能力的重要方面.为此,教师要善于引导学生开动脑筋,积极思维,使学生学会从实际问题中抽象出数学概念.]

三、巩固概念

师:(出示小黑板.)

[例1] 下列表达式是函数吗?如果是函数,指出自变量x的取值范围:

(1) $y=2x+3$. (2) $y=\frac{1}{x-1}$.

(3) $y=\sqrt{x-2}$.

(请三位同学口答这三道小题,答案略.)

[例2] $x^2+y^2=1$是否满足课本中的函数定义?

生甲:(犹豫)好像是满足课本中的函数定义的.

师:做学问不能有半点虚假,不能用“好像”这种模棱两可的词语,请你再看一遍函数定义再作回答.

生甲:定义的第一句话肯定满足,对$x^2+y^2=1$来说,对x的每一确定的值,y都有确定的值与它对应.不过这里对应于x的y的值不是唯一的.因此,定义的第二句话不完全满足.

生乙:(抢先插话)不满足课本有关函数的定义,肯定不是函数.

师:生乙说得对!(小结)函数概念是很重要的基本概念,今后我们经常要与它打交道.要求同学们在理解基础上加以记忆.它的本质是两个数集之间的单值对应.值得注意的是:(1)自变量的取值范围;(2)对自变量取值范围内的每一个确定的值,都有且只有一个确定的值(唯一的值)与它对应,至于对应关系用什么方法来表示是无关紧要的.

四、布置作业

略.

教案说明

(1) 在通过对实际问题进行分析引出函数定义之前，不宜提出"变量 y 随着变量 x 的变化而变化"，更不宜在函数定义中添上这句话. 这句话初看上去，通俗、形象，似乎有助于学生掌握函数概念，但它的含义模糊，不能反映出函数概念的本质特点，不利于今后对近代函数概念的学习，而且也将常量函数 $(y=c)$ 排除在函数之外，所以本教案在分析四个实际问题以及定义函数时，都按照课本中定义函数的方式(单值对应)来处理.

(2) 关于 $x=c$(c 为常数，x 为自变量)、$y=c$(c 为常数，y 为因变量)是不是函数的问题，初三和高一代数课本中都没有提到，教学中也不必提出，但作为数学教师有必要弄清楚.

对于这个问题有两种意见：一是认为 $x=c$(c 为常数，x 为自变量)是平行于 y 轴且与 y 轴的距离为 $|c|$ 的一条直线，而图象法是函数表示的一种方法，因此它是函数；另一种意见认为 $x=c$ 中，x 不是变量，不满足课本中的函数定义，故它不是函数.

这两种意见似乎各有道理，结论互相对立. 但这两种意见都有问题. 第一种意见是错误的. 因为能画出图象的解析式并非都是函数；反之，画不出图象的函数的确存在. 例如 $x^2+y^2=1$ 不是函数，而

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数};\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

是函数. 第二种意见的结论是正确的，但在 $x=c$(x 为自变量，c 为常量)中，y 不是不存在，而是隐藏着，这从它们的图象中可以明

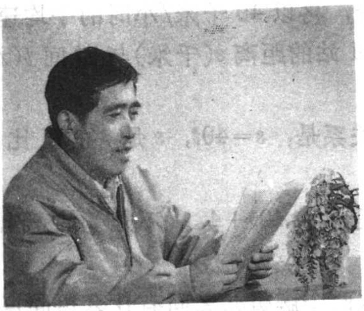
显看出；另外不能把常量与变量看作绝对对立，应视常量为特殊变量．因此，对于函数定义中“设在某变化过程中有两个变量x、y”，它还是满足的．$x=c$不是函数的真正理由应是“有一个$x(=c)$有无数个y与它对应”，从而不满足单值函数定义．类似地可知$y=c$（c为常量，y是因变量）是满足函数定义的（称为常数函数）．

这个问题有一定难度，但对巩固、加深理解函数定义以及常量与变量的辩证思想是有益的．这一内容可作为教师或重点中学的数学课外小组的教学参考资料．

一次函数的概念

倪承源（安徽芜湖市第一中学）

作 者 简 历



倪承源　安徽泾县人，1964年毕业于安徽师范学院数学系，1967年任芜湖市第五中学数学教师．1988年被评为安徽省中学高级教师．现任芜湖一中数学教研组组长，芜湖市数学学会常务理事．

教 学 目 的

(1) 掌握一次函数的概念，了解一次函数和正比例函数的关系．

(2) 初步掌握用待定系数法来确定一次函数的解析式．

(3) 培养学生分析、类比和综合、归纳的能力．

教 学 过 程

一、复习提问，引入新课

师：我们先来复习一下正比例函数与反比例函数的有关问题：

(出示小黑板.)

(1) 什么是正比例函数和反比例函数?

(2) 说出下面两个问题中两个量的函数关系,并指出它们是不是正比例函数.

① 汽车以40千米/小时的平均速度从A站出发,行驶了t小时,那么汽车离开A站的距离s(千米)和时间t(小时)之间的函数关系是什么?

② 汽车离开A站4千米,再以40千米/小时的平均速度行驶了t小时,那么汽车离开A站的距离s(千米)与时间t(小时)之间的函数关系是什么?

生:① s与t之间函数关系是:$s=40t$,s是t的正比例函数.

② s与t之间函数关系是:$s=40t+4$,s不是t的正比例函数.

师:同学们再想一想,这两个解析式之间有什么相同点和不同点.

生:$s=40t$及$s=40t+4$这两个解析式里,s都是t的一次式且一次项的系数相同,不同的是一个有常数项,一个没有常数项.

师:解析式为一次式,且没有常数项(或者说常数项为零)的函数是正比例函数,这种函数我们已研究过了.解析式为一次式,且常数项不为零的函数是我们今天所要研究的内容.为了对这种函数有更进一步的认识,我们再来看下面的问题:

(出示小黑板.)

拖拉机开始工作时,油箱中有油40千克,如果每小时耗油6千克,那么油箱中的余油量q(千克)与它的工作时间t(小时)之间的函数关系是什么?

生:q与t的函数关系是:$q=40-6t$(或$q=-6t+40$).

师:$s=40t+4$,$q=-6t+40$这两个函数关系有什么共同的

特征.

生(众)：都是 t 的一次式.

师：既然 s 和 q 都是 t 的一次式，对这种函数，同学们能否给它们取一个恰当的名称？

生：一次函数，因为自变量为一次是它们的共同特征.

师：对！方法是正确的，抓住事物的共同特征，对事物进行科学命名是科学研究的基本方法．下面让我们一起来深入研究一次函数.

(板书课题：一次函数.)

[新课引入的好坏在某种程度上关系到课堂教学的成败，课堂教学的展开，学生注意力的集散，都与新课的引入有关，为了激发学生的求知欲望，吸引同学们的注意力，这里采用了"复习旧知识，培养观察力，诱导新内容"的引入法.]

二、讲 授 新 课

师：通过以上两个问题的讨论，同学们对一次函数有了初步的认识，大家知道正比例函数和反比例函数的解析式分别为 $y=kx$ 及 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，那么一次函数的解析式又是什么呢？我们能不能抓住自变量是一次这一特征写出它的解析式呢？

生：$s=at+b$，$y=kx+a$，$y=ax+b$，……

师：在函数里通常用 x 表示自变量，用 y 来表示 x 的函数，所以一次函数一般可写成 $y=kx+b$ 的形式．同学们再考虑一下，这里 k 和 b 的取值范围有没有限制.

生甲：$k\neq0$ 且 $b\neq0$.

生乙：$k\neq0$，b 可为任何实数.

师：既然有两种意见，大家可以讨论一下

生丙：$k\neq0$，因为若 $k=0$，这里就没有自变量的一次项，因此

不是一次函数．若 $b=0$，则 $y=kx$，y 是 x 的正比例函数，不是一次函数．

生丁： b 可为任意实数，$b=0$，y 既是 x 的正比例函数，也是 x 的一次函数．

师： 一次函数的特征是自变量 x 的最高次数是一次．当 $b=0$ 时，仍是 x 的一次式，所以 y 仍是 x 的一次函数，不过它是一种特殊的一次函数．一般地，一次函数的表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$．

（板书一次函数的概念．）

［启发学生积极思考，引导学生探求新知识是进行良好的课堂教学的先决条件，在引导学生探求新知识的过程中，要使学生深入了解概念，必须步步设疑，层层释疑，才能发展学生的思维．］

师： 从上面的讨论可以知道，要确定一个一次函数，关键是找出 k 和 b 的值．如何根据题意求出 k 和 b 呢？这里向大家介绍一种方法，同学们先看下面的例题．

［例 1］　已知 $y=m+t$，这里 m 为常数，t 与 x 成正比例，并且当 $x=1$ 时，$y=5$；当 $x=2$ 时，$y=7$．写出 y 与 x 的函数关系．

师： 这里 t 与 x 成正比例，那么 t 与 x 的函数关系应是什么形式？进而 y 与 x 的函数关系应是什么形式？y 是 x 的什么函数？

生： $t=kx(k\neq0)$，又 $\because y=m+t$，$\therefore y=m+kx$，且 $k\neq0$．因此 y 是 x 的一次函数．

师： 回答得完全正确，根据题目的已知条件能不能求出 m 和 k 呢？

（学生讨论，教师巡视，并加以适当提示．）

生： 这里有两个未知量 k 和 m，必须知道两个独立条件才能求出来，而题目恰好已知两个独立条件，因此可列出两个方程：

当 $x=1$ 时，$y=5$，可得

$$5=m+k; \qquad ①$$

当 $x=2$ 时，$y=7$，可得

$$7=m+2k. \qquad ②$$

解 ①、② 组成的方程组得 $k=2$, $m=3$.

$$\therefore \quad y=3+2x.$$

师：这里先设置某些未知的系数，列出函数式，然后根据已知条件确定这些未知系数，这种方法，叫待定系数法. 它是数学中常用的一种方法，请同学们用这一方法来解下面的例 2.

[例 2] 汽车从 A 站开往 B 站后，以 v_0 千米/分钟的速度匀速开往 C 站，已知离开 B 站 9 分钟时，汽车离 A 站 10 千米，再行驶一刻钟，离 A 站 20 千米，如果再行驶半小时，汽车离 A 站多少千米？

师：这是一个实际问题，这里哪些量是已知的？哪些量是未知的？哪些量是待求的？请画出该题的示意图.

生：已知量有：离开 B 站 9 分钟时，汽车离 A 站 10 千米；离开 B 站 24 分钟时，汽车离 A 站 20 千米；汽车总共行驶了 54 分钟（指离开 B 站的时间）.

未知量有：汽车行驶的速度；A、B 两站的距离；汽车离开 B 站行驶 54 分钟后离开 A 站的距离.

待求量：汽车离开 B 站行驶 54 分钟后离开 A 站的距离.

（教师可用幻灯将示意图演示出来.）

师：在未知的三个量中，最关键的是哪些量？

生：最关键的是汽车行驶速度和 A、B 两站的距离.

师：题目给出了汽车离开 B 站后的两次行驶的时间及其离开 A 站的距离. 如将汽车行驶的速度 v_0 与每次汽车行驶的时间 t 相乘，所得的值 s_1 是汽车离开哪个站的距离？如果要算出汽车每次行驶离开 A 站的距离，应怎样进行计算？

生：s_1 是汽车离开 B 站的距离，要算出汽车每次行驶后离开 A 站的距离，必须再加上 A、B 两站间的距离，即 $s=s_1+s_0=s_0+v_0t$（其中 s_0 是 A、B 两站的距离）.

师：同上题一样，这里s_0、v_0是待定系数，要求出这两个待定系数，可用待定系数法来解决. 请同学们将此题的解法完整地写出来.

（指定一、二个学生板演，并纠正其错误.）

生：设A、B两站的距离为s_0（千米），汽车离开B站t分钟后，离开A站的距离为s（千米），则$s=v_0t+s_0$.

当$t=9$时，$s=10$，得$10=9v_0+s_0$;

当$t=24$时，$s=20$，得$20=24v_0+s_0$.

解方程组$\begin{cases}10=9v_0+s_0,\\20=24v_0+s_0,\end{cases}$得

$$v_0=\frac{2}{3},\ s_0=4.$$

$$\therefore\quad s=\frac{2}{3}t+4.$$

当$t=54$时，$s=\frac{2}{3}\times54+4=40$（千米）.

答：离开B站54分钟后，汽车离A站40千米.

[引导学生对问题的已知、未知、待求量进行分析，并用示意图加以直观观察，从而帮助学生找出关键量，发现它们之间的相互联系，这样做有利于提高学生分析问题的能力. 另外，在教学上还必须注意培养学生的书面表达能力，这些都是逻辑思维训练的一部分.]

三、课 堂 练 习

师：请同学们做课本上的练习.

已知$y-3$与x成正比例，且$x=2$时，$y=7$.

(1) 写出y与x之间的函数关系;

(2) 计算$x=4$时y的值;

(3) 计算$y=4$时x的值.

四、小　结

(1) 一次函数的概念及其与正比例函数的关系(略).

(2) 待定系数法在数学中有广泛的应用，其基本步骤是设未知系数，由已知条件列出等式，求出未知系数.

五、课外作业

课本习题(略).

教案说明

(1) 这节课一定要先让学生阅读课本，互相讨论，教师在教学上要恰当地设疑立障，引导学生大胆猜想，勇于探索，鼓励学生积极思维，这样做有利于开发学生的智力，帮助学生提高分析、解决问题的能力. 这是本课教学设计的主要指导思想.

(2) 一次函数是在正比例函数的基础上引入的，因此在教学的各个环节中，各个知识点之间要以旧引新，以新带旧，加强新旧知识的联系和类比，培养学生的归纳、综合能力.

(3) 在这节课中，必须注意数学理论的教学与实际问题的结合，即从实际引入，形成概念，研究其图象和性质，最后还要回到实践中去加以应用.

二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象和性质

朱新民（安徽合肥六中）

作　者　简　历



朱新民　安徽合肥市人，1961年毕业于皖南大学数学系，同年任合肥第五中学数学教师．1987年被评为安徽省中学高级教师．现任合肥第六中学数学教师，合肥市中学数学教研会副秘书长．

教学目的

(1) 使学生掌握一般二次函数的三个主要性质．

(2) 会用描点法作出二次函数的图象，并能根据函数图象确定其单调区间．

(3) 能利用函数性质求出二次函数的顶点、对称轴和最大(小)值．

(4) 理解$y=ax^2+bx+c$与$y=ax^2$图象的形状与位置关系．

(5) 培养学生的观察、概括能力．

教学过程

一、复　　习

师：上节课，我们已学过了最简单的二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质，初步掌握了它的三个主要性质，现在我请一位同学来回答几个问题.

（在黑板的右侧写下"$y=2x^2$".）

师：函数 $y=2x^2$ 的顶点、对称轴、开口方向以及函数值的增、减情况如何？

生甲：函数 $y=2x^2$ 的顶点坐标是 $(0, 0)$，对称轴是直线 $x=0$，它的图象开口向上. 当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大.

（教师边听边在黑板上 $y=2x^2$ 的下面写出顶点坐标、对称轴，并画出略图.）

师：很好！请你再说说函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=2x^2$ 的图象在开口上，有什么相同和不同？

生甲：它们的开口都是向上的，但开口大小不一样，$y=2x^2$ 的开口较小.

师：说得对！二次函数的平方项系数 $a>0$ 时，开口向上；$a<0$ 时，开口向下. 至于开口的大小，我们可以按 $|a|$ 的大小加以判定，当 $|a|$ 较大时，它的开口反而小；当 $|a|$ 较小时，它的开口反而大.

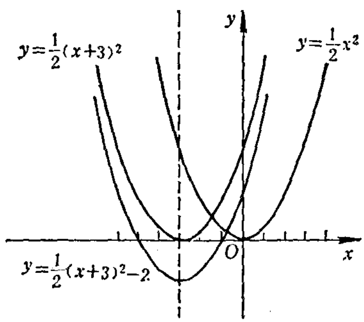
二、分 析 特 例

师：我们已经掌握了最简单的二次函数的图象和性质，现在要进一步研究一般二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质，请大

家阅读课本并思考三个问题.

（挂出事先画好的图表.）

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\frac{1}{2}x^2$				…	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	…
$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$	…	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	…			
$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$	…	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$	…			



(1) 课本中三个函数 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$、$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 的图象是怎样作出的？

(2) 它们的形状是否相同？最值各等于多少？

(3) 你能发现它们的位置变化规律吗？

（教师在黑板偏右处写出 ① 作法；② 形状、最值；③ 移动规律. 学生此时情绪高涨，专心阅读课本. 教师巡视一周后用红笔在表上将几个关键性的数据框起来，以增加启发性，并请几位同学回答问题.）

师：乙同学，现在请你回答第一个问题.

（教师复述一下问题.）

生乙：用描点法作出来的.

师：对！描点法作图前要做些什么准备工作？

生乙：取点列表.

师：对！但要列好表，就要正确地选取自变量 x 的适当的值并计算出相应的函数值，这一步如果算错了，点的坐标就会错，图象自然也就错了. 因而今后一定要认真进行计算，以保证结果正确. 请你再回答第二个问题.

（教师复述一下问题.）

生乙：它们的形状相同，最小值分别是 0、0、-2.

师：对，因为它们的平方项系数相同，所以形状相同；至于最值，其实就是顶点的纵坐标. 当然，究竟是最大还是最小值，就要看图象开口是向下还是向上了. 开口向上的有最小值；开口向下的有最大值. 第三个问题如何回答呢？

（教师复述一下问题.）

生乙：$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ 的图象向右移动 3 个单位就是 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 的图象向上移动 2 个单位，再向右移动 3 个单位就是 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

（学生交头接耳，议论纷纷.）

师：乙同学发现了三个图象的位置关系，讲得完全正确.（稍顿，面向后两组学生）你们在议论什么呢？哪一位说说？

生丙：应该先把 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象向左平移 3 个单位就得到 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ 的图象，再把 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$ 的图象向下平移 2 个单位就得到 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 的图象.

师：你的回答与乙同学的回答本质上相同吗？

生丙：（思索片刻.）$y=\frac{1}{2}x^2$是我们已经学过的函数，另两个还没有学过.

师：丙同学讲得对．$y=\frac{1}{2}x^2$是我们已经掌握的函数，而另两个函数是我们正在研究的．人们的认识过程总是通过已知的去研究未知的，所以丙同学的回答符合人们的认识过程，因而比乙同学答得好！

师：请丙同学说一说三个函数的顶点和对称轴.

（学生回答略.）

师：如何从数表、图象及解析式中去观察函数的顶点和对称轴呢？

（教师针对学生的回答，进行必要的指导.）

师：如果我们现在将$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$，$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$分别化为$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}$，$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$，那么同学们能不能画出后面这两个函数的图象呢？

生：能！它们实质上就是$y=\frac{1}{2}(x+3)^2$，$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$的图象.

三、由特例抽象出一般规律

师：刚才我们已经观察了三个特殊函数图象之间的一些规律．比如，平方项系数$\frac{1}{2}$是决定开口方向及大小的，常数3与-2是决定顶点与对称轴的，也能确定函数图象平移的方向与距离．因而这些数据至关重要，应予注意．现在要问：函数$y=ax^2+bx+c$与$y=ax^2$的图象的形状、顶点、对称轴和相对位置如何呢？要解决这个问题，事先要做什么准备工作呢？请大家考虑后回答.

生丁：先要配方.

师：那就请你上来做，其他同学也一起做.

（教师巡视辅导，然后总结.）

师：丁同学提出先要配方，这是很好的，说明他已领会到了研究一般二次函数的关键之处，这一点很重要，配方完成后就可以仿照上面的做法，确定它的顶点、对称轴、开口方向以及它与 $y=ax^2$ 的位置关系了. 在这里我们又一次看到配方法在数学学习中的重要作用了，大家务必很好地掌握它！现在来看看丁同学的配方做得对不对？

（学生配方的结果是正确的. 教师把配方的结果 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 与图表中的函数进行对比，利用图象进行讲解，说明左、右平移与上、下平移的规律，指出顶点坐标、对称轴、最大(小)值等.）

师：请同学们阅读课本中关于最简单的二次函数的三条性质. 我们能不能仿照它去总结一般二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质呢？

生(众)：能！

师：好！现在我们就把书上关于一般二次函数性质的结论阅读一边.

四、总结方法

（教师讲解课本中例2与例3，并总结解题方法.）

师：求抛物线的对称轴、顶点坐标以及求二次函数的最大(小)值，有两种基本方法：一是配方法；二是公式法. 由于公式容易记错，所以我们应该掌握解题的思想方法，重视配方法，而不能仅仅满足于会代公式.

五、布置作业

1. 阅读课本中“二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质”.

2. 课本习题(略).

教案说明

(1) 我校系省重点中学,学生基础较好. 通过上一节的学习,他们基本掌握了 $y=ax^2$ 的图象和性质,了解了系数 a 与图象的开口方向和大小的关系等. 这些是进一步掌握一般二次函数图象和性质的基础和关键. 在此基础上,学生接受本节内容没有多大困难.因此,我采用了提出问题,由学生通过对图表的观察对比,联系上节知识,自己解决问题的教学方法,试图提高学生的观察、分析、概括能力.

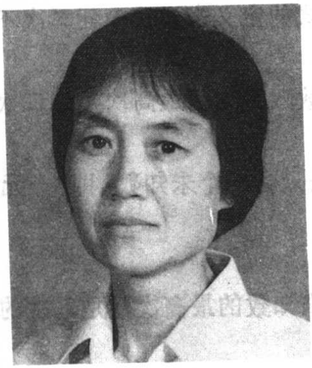
(2) 本节涉及到对抛物线作"平移"变换,学生不易掌握.为此,我分成三步对学生进行引导,即从数表上看⟶从图上看⟶从解析式上看,最后落实到从解析式上看出平移的方向和距离."平移"是本节的难点,学生不可能在一节课内完全掌握,在以后的教学中还要反复巩固.

(3) "二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质"的教学约需2课时,这里介绍了第1课时的教学,下一课时将以学生练习为主,进一步巩固已学的知识.

一元二次不等式的解法

邓俊波（河南师大附中）

作 者 简 历



邓俊波　河南孟津县人，1962年毕业于新乡师范学院数学系，同年任河南焦作四中数学教师．1988年被评为河南省中学高级教师．1987年和1988年曾两度荣获新乡市教书育人优秀教师称号．现任河南师大附中数学教师、数学教研组组长．

教学目的

(1) 使学生理解一元二次不等式的概念．

(2) 使学生熟练掌握一元二次不等式的解法．

教学过程

一、复习旧知识，引出新概念

师：什么叫一元一次不等式？

生：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是一次的不

等式，叫做一元一次不等式.

师：对这个定义需要正确理解"一元"与"一次"的含意．请同学们观察下列问题.（板书：不等式 $x^2-3x-6>0$，$2x^2+x<5$.）

试问：这两个不等式中各含有几个未知数？未知数的最高次数是几次？

生：两个不等式中都只含有一个未知数 x，未知数的最高次数都是二次。

师：谁能仿照一元一次不等式的定义来说明一元二次不等式的定义？

生：不等式中只含一个未知数，且它的最高次数是二次的不等式叫一元二次不等式.

师：对！这种不等式的特点是只含一个未知数，即"一元"，最高次数是二次.

（板书以下定义.）

定义：含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式.

一般形式为 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$.（$a\neq0$）

师：请大家翻开课本，阅读理解一元二次不等式的定义.

二、一元二次不等式的解法

师：通过刚才的学习，我们已经掌握了一元二次不等式的概念，现在让我们一起来讨论一元二次不等式的解法.

[例 1]　解不等式：$(2x+1)(3x-1)>0$.

师：根据已学过的一元一次不等式及一元一次不等式组的解法，能否解上述不等式呢？

生：能！

师：该不等式是一元二次不等式，虽然还没学过它的解法，但根据已有知识可将原不等式转化为一元一次不等式组来解，即解

不等式组：

$$\begin{cases}2x+1>0,\\3x-1>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x+1<0,\\3x-1<0.\end{cases}$$

解之，得
$$\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2},\\x>\dfrac{1}{3}\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2},\\x<\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

故原不等式的解集是 $x>\frac{1}{3}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$.

[设置此例的教学目的主要是为了说明：一元二次不等式可以转化为一元一次不等式组来求解，从而加深学生对一元二次不等式的认识，复习巩固已学过的不等式组的解法.]

师：除上述解法外，今天我们来探讨一元二次不等式的另一解法——几何解法，即利用二次函数的图象来求出一元二次不等式的解.

[例 2] 已知函数 $y=x^2-x-6$，求：

(1) x 取哪些值时，$y=0$；　　(2) x 取哪些值时，$y>0$；

(3) x 取哪些值时，$y<0$.

(教师板书，学生思考、议论.)

师：如何解决例 2 所提出的问题呢？

生：因为 $y=x^2-x-6=(x+2)(x-3)$，所以，

(1) 当 $x=-2$ 或 $x=3$ 时，$y=0$；

(2) 当 $x<-2$ 或 $x>3$ 时，$y>0$；

(3) 当 $-2<x<3$ 时，$y<0$.

师：对！请同学们考虑一下，是否能够利用函数 $y=x^2-x-6$ 的图象把解一元二次方程 $x^2-x-6=0$ 与解一元二次不等式 $x^2-x-6>(<)0$ 联系起来.

(教师出示小黑板，给出 $y=x^2-x-6$ 的函数图象.)

师：先请同学根据图 1 回答下列问题：

(1) 抛物线与 x 轴有几个交点？并说出交点的坐标；

(2) 所有的交点将 x 轴分成几段？

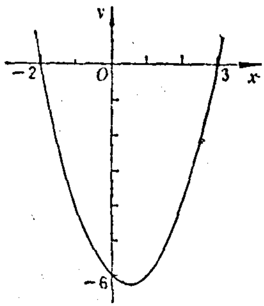


图 1

(3) 哪一段图象位于 x 轴上方？哪一段位于 x 轴下方？

(4) 图象位于 x 轴上方说明了什么问题？反之，位于 x 轴下方又说明了什么问题（指 y 的符号）？

(5) x 为何值时，$y=0$？这句话从函数图象上看意味着什么？

（学生回答，教师适当引导，帮助学生作出正确回答.）

生甲：从图中可以看出抛物线与 x 轴有两个交点，交点的坐标为 $(-2, 0)$，$(3, 0)$.

生乙：图中的所有的交点将 x 轴分成 3 段.

生丙：图中对应于自变量 x 取值小于 -2 或大于 3 的那两段曲线位于 x 轴的上方；而自变量 x 取值小于 3 而大于 -2 的那段曲线位于 x 轴的下方.

生丁：图象位于 x 轴上方，说明此时函数值大于零，如当 $x<-2$ 或 $x>3$ 时，$y=x^2-x-6>0$；图象位于 x 轴下方，说明此时函数值小于零，如当 $-2<x<3$ 时，$y=x^2-x-6<0$.

生戊：x 为何值时，$y=0$？这句话意味着求出函数图象与 x 轴交点的横坐标.

师：一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$，可根据 $\Delta=b^2-4ac$ 的三种不同情况，分别得出下述结论：

(1) 当 $\Delta>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点（图 2），即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根 x_1 和 x_2 $(x_1<x_2)$，此时 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $x<x_1$ 或 $x>x_2$；$ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $x_1<x<x_2$.

(2) 当 $\Delta=0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个交点(图 3)，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相同的实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$(即抛物线顶点横坐标)，此时不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ 的所有实数；而不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集.

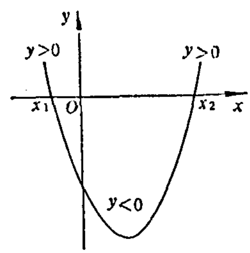


图 2

(3) 当 $\Delta<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点(图 4)，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根. 此时不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是全体实数，而不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集.

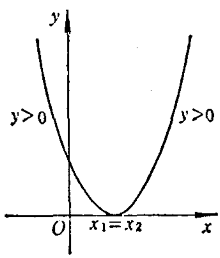


图 3

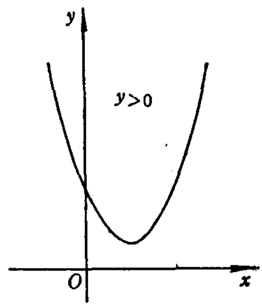


图 4

以上我们讨论的是 $a>0$ 的情况. 如果 $a<0$，不需要再一一讨论，只要根据不等式的性质在不等式两边同乘以 -1，将原不等式化成二次项系数为正的不等式，再求变形后的不等式的解集，该不等式的解集就是原不等式的解集.

总之，要求不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 <0)$(a>0)$的解集，首先要看二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有无实根，有的话求出其根，再根据不等式是">0"还是"<0"写出不等式的解集来.

三、课堂练习

1．解不等式 $2x^2-3x-2>0$.

2．解不等式 $4x^2-4x+1>0$.

3．解不等式 $-x^2+2x>3$.

4．解不等式 $x(x-1)<x(3x-4)+2$.

(以上几个不等式的解法，是按课本要求利用二次函数的图象来解的，但并不是对所有一元二次不等式都要呆板地效仿此法．如第3题，采用配方法解更为简便．即由 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2<0$，得原不等式的解集是空集.)

课外作业(略).

教案说明

(1) 本课教学是在学生已经具备了一元一次不等式、一元一次不等式组及绝对值不等式等有关知识的基础上进行的．由于一元二次不等式在高中的代数、三角、解析几何中都有广泛的应用，因此这堂课的教学内容在整个中学数学中是比较重要的内容，教师对此应加以足够的重视.

(2) 本课整个教学过程的安排的指导思想是：课堂教学必须符合循序渐进的教学原则．因此，本课采取了由一元一次不等式及一元一次不等式组逐步引入一元二次不等式的教学方式．这样引入新概念的教学过程，同样也符合教学的量力性原则，即数学教学必须考虑到学生的年龄特征以及接受能力．另外，新概念的引入及其教学过程也考虑到了必须遵循人类思想认识的一般规律，即在个别特例讲解的基础上总结出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的相对位置关系，进而讨论不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 <0)的解集．本课教学的另外一个特点是通过数形结合的思想方法来研究

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 <0）的解法．由于数学是研究数与形及其关系的一门科学．数形结合观点是研究数学的一个基本观点，理解与掌握数形结合的思想方法，有利于提高学生的数学素养，有助于学生理解概念，深化认识，活跃思想，加深印象，便于记忆，有利于培养学生分析问题和解决问题的能力．因此，在教学中应及早地重视学生这方面的能力培养．本课还运用先讲后练，讲练结合的方法，通过例题和提问有效地启发了学生积极地进行思维．

(3) 按要求"一元二次不等式的解法"应安排两个课时，本课时的重点放在介绍"解法"上．

一元二次不等式的应用

欧阳东方（北京市西城区教育教学研究中心）

作 者 简 历



欧阳东方 广东梅县人，1962年毕业于北京师范大学数学系，同年任北京七中数学教师，后任数学教研组组长. 1978年调北京西城区教研中心任教研员，中教高级教师. 曾任中国数学会理事，现任北京数学会理事，西城数学会副理事长,1990年获西城区"科技园丁"称号.

教学目的

(1) 使学生学会利用一元二次不等式讨论函数中自变量的取值范围.

(2) 使学生学会利用一元二次不等式讨论一元二次方程根的不同情况.

(3) 在掌握上述两知识的同时，提高学生的逻辑思维能力和数形结合的思维能力.

教学过程

一、复习一元二次不等式的解法

[例1] 解不等式：$8-7x-x^2>0$.

要求学生把解法写在预先准备好的胶片上.在学生解题时，教师在全班巡视. 发现不同的解法和学生所出现的错误后，先将学生的正确解法通过幻灯机投影给全班学生观看，然后将学生典型的错误解法也通过幻灯机投影给全班学生观看，让学生指出错误的所在并分析错误的原因.

如果先在原不等式两边都乘以 -1，使不等式变为 $x^2+7x-8<0$，然后解答；或者，利用二次函数的图象来解，即令 $y=8-7x-x^2$，作出其图象，由图象看出原不等式的解集. 这两种方法学生一般不会出错. 学生易犯的错误有以下三种：

(1) 因为 $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times(-1)\times8=81>0$，方程 $8-7x-x^2=0$ 的根是 $x_1=-8$，$x_2=1$.

所以，不等式 $8-7x-x^2>0$ 的解集是

$$x<-8 \quad 或 x>1.$$

错误原因是忽视了由判别式来判断一元二次不等式的解集的先决条件，即应该先使二次项系数为正，这样才能运用判别式来得到正确结果.

(2) 将原不等式左边因式分解，得

$$(8+x)(1-x)>0,$$

如图1，由数轴标根法得不等式 $8-7x-x^2>0$ 的解集是

$$x<-8 \quad 或 \quad x>1.$$

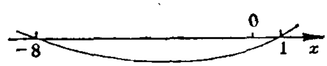


图 1

错误原因是忽视了使用数轴标根法时必须先使二次项系数为

正这样一个先决条件.

(3) 将原不等式左边因式分解，得

$$(8+x)(1-x)>0,$$

将其转化为两个不等式组

$$\begin{cases}8+x>0,\\1-x>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}8+x<0,\\1-x<0\end{cases}$$

来解，学生易犯的错误是漏掉其中一个不等式组.

在学生分析完毕之后，教师加以总结，可再强调一下解一元二次不等式时学生易犯的错误及原因，同时指出，利用二次函数的图象来解一元二次不等式所体现出的形数结合的优越性，即直观易懂，不易出错.

二、引 入 课 题

师：请同学们回忆一下，以前碰到哪些问题，需要利用解不等式的知识来解决？

生：(1) 求函数中自变量的取值范围；

(2) 利用一元二次方程的根的判别式来确定方程系数中的参数，使方程的根能满足所要求的条件，即讨论一元二次方程根的情况.

(一般说来，第一个问题，学生都能答出来.而第二个问题，由于是在初二时学的，学生可能一时想不起来，教师可给予适当的启发，或直接由教师说出来，同时指出前后问题的区别与联系，即当时的问题只须用一元一次不等式就可以解决了. 而现在学过一元二次不等式后，可以解决较为复杂一些的这类问题了.)

[例 2] 求下列函数中的自变量的取值范围:

(1) $y=\dfrac{4}{x\ -2x-15}$；　　(2) $y=\sqrt{3+2x-x\ }$；

(3) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;　　　　(4) $y=\frac{\sqrt{5-x}}{\lg(x-3)}$.

(教师把事先写在胶片上的题目用幻灯机打出，要求学生把解法也写在胶片上．在学生解题时，教师在全班巡视．

对于(1)、(2)两题，学生一般不会有什么困难和问题．教师可主要汇集学生在解(3)、(4)两题时所出现的错误，由幻灯机打出，让学生讨论产生错误的原因．学生常犯的错误是：

解第(3)题时，容易忽略考虑$1-x\neq 0$这一个不等式，而只考虑解不等式$\frac{1+x}{1-x}>0$．解第(4)题时，学生往往不能全面考虑使式子有意义的条件：$\lg(x-3)\neq 0$和$x-3>0$，常常会遗漏条件中的某一个．)

师：求函数中自变量的取值范围，要注意以下两点：

(1) 如果题目是实际问题，那么要确保问题有实际意义；

(2) 如果题目中的函数是用解析式给出的，那么要确保解析式有意义．例如：

在整式中，自变量取全体实数．

在分式中，自变量取使分母不为零的实数．

在偶次根式中，被开方数中的自变量要取使被开方数为非负实数；在奇次根式中，自变量取全体实数．

在对数式中，自变量取使底数大于零且不等于1，真数大于零的实数．

在指数式中，自变量取使零指数、负整指数的底数不为零的实数(分数指数幂的底数限制与根式限制相同)．

若解析式是由几种运算复合而成，则考虑解析式中自变量的取值范围时，自变量取值是使各个式子都有意义的公共部分．

找公共部分的方法是，在数轴上先把各个不等式的解集表示出来，再找它们的公共部分．

[例3] m是什么实数的时候，方程

$$x^2-(m+2)x+4=0$$

有实数根？

（教师通过幻灯机将题目打出．要求学生把解法也写在胶片上．在学生解题时，教师在全班巡视．发现不少学生是这样做的：

因方程有实数根，得 $\Delta\geqslant 0$，即

$$[-(m+2)]^2-4\times1\times4\geqslant 0,$$

解得 $$m\leqslant -6 \quad 或 \quad m\geqslant 2.$$

教师将学生的这种解法由幻灯机打出，让全班学生观看，并让学生讨论.）

师：这种做法有没有问题？

（学生众说纷纭，各抒己见，教师最后加以总结.）

师：审查原题"m是什么实数时，方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有实数根？"而上面的解法是从"因为方程有实数根……"这一点出发的，即学生是在解原命题的逆命题．因为逆命题成立时，原命题并不一定成立，因而犯了逻辑上的错误．正确的解法应该是

这个方程的判别式是

$$[-(m+2)]^2-4\times1\times4=m^2+4m-12.$$

我们知道，当判别式大于或等于零时，原方程有实数根.

由 $m^2+4m-12=0$，得 $m=2$ 或 $m=-6$；

由 $m^2+4m-12>0$，得 $m<-6$ 或 $m>2$.

由此可知，当 $m\leqslant -6$ 或 $m\geqslant 2$ 时，原方程有实数根.

如果原题改为"若方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有实数根，求实数m的值."那么，同学们的解法就没有问题了.

在解题时，同学们应该注意解题的依据，否则就会出现各种错误．请看下面的解法中，有没有错误？

[例4] 若m为有理数，试确定k的值，使方程

$$x^2-2mx+3x-3m^2-2m+4k=0$$

的根为有理数.

解 原方程的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta&=(3-2m)^2+4\cdot(3m^2+2m-4k)\\&=16m^2-4m+9-16k\\&=\left(4m-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{35}{4}-16k\right),\end{aligned}$$

∴ 当 $\frac{35}{4}-16k=0$, 即 $k=\frac{35}{64}$ 时, 原方程的根为有理数.

(对上述解法, 同学之间展开了热烈讨论, 绝大多数学生认为这种解法是正确的. 教师请持否定意见的学生说出理由.)

生: 我认为这种解法有问题. 因为要使原方程的根为有理数, 只需 Δ 为完全平方数, 即 $\Delta=16m^2-4m+9-16k=a^2$, 这里 a 为有理数, 那么使 $k=m^2-\frac{m}{4}+\frac{9}{16}-\frac{a^2}{16}$ 即可. 所以 k 有无穷多个解.

师: 非常好, 当我们取 $a=0$, $m=\frac{1}{8}$ 时, 得 $k=\frac{35}{64}$. 这就是说, 前面的解只是一种特殊情况.

[例 5] 求 m 是什么实数时, 方程

$$2(m+1)x^2-4mx+3(m-1)=0$$

有两个正实数根.

生: 设 x_1、x_2 是方程的两个正实数, 由韦达定理, 得

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{4m}{2(m+1)}>0,\\[2mm]x_1\cdot x_2=\dfrac{3(m-1)}{2(m+1)}>0.\end{cases}$$

解得 $$m<-1 \quad 或 \quad m>1.$$

(课堂上, 同学们对这种解法的正确性产生了不同的看法, 此时教师需给予适当地引导, 最后加以总结.)

师: 上述解法是错误的. 不妨在所求得的 m 的取值范围内取一个值, 如 $m=2$, 代入原方程, 有 $6x^2-8x+3=0$, 从此方程的判

别式 $\Delta=-8<0$ 可知，它无实数根，当然更谈不上有两个正实数根了.

产生这种错误的原因是，若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个正实数根，仅仅满足韦达定理所提供的条件 $-\frac{b}{a}>0,\frac{c}{a}>0$ 是不够的，还必须满足 $\Delta\geqslant0$ 的条件. 换句话说，实系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个正实数根的充分必要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant0,\\-\frac{b}{a}>0,\\\frac{c}{a}>0.\end{cases}$$

同样，实系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个负实数根的充分必要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant0,\\-\frac{b}{a}<0,\\\frac{c}{a}>0.\end{cases}$$

实系数方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 两根异号的充分必要条件是

$$\frac{c}{a}<0.$$

这里又为什么不需要 $\Delta\geqslant0$ 这个条件了呢？这是因为，由 $\frac{c}{a}<0$，可以推得 $ac<0$，从而保证了 $\Delta=b^2-4ac>0$.

［例 6］ 不等式 $mx^2+1>mx$ 对于任何实数 x 都成立，求 m 的取值范围.

生：由不等式 $mx^2+1>mx$，得

$$mx^2-mx+1>0. \quad ①$$

当 $m\neq 0$ 时，不等式 ① 为二次不等式，要使二次不等式 $mx^2-mx+1>0$ 的解集为全体实数，则m须满足如下条件：

$$\begin{cases} m>0, \\ \Delta<0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} m>0, \\ m^2-4m<0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m>0, \\ 0<m<4. \end{cases}$$

所以，当 $0<m<4$ 时，$mx^2+1>mx$ 对于任何实数 x 都成立。

师：对上面解法还有没有补充意见？

生：当 $m=0$ 时，显然 $mx^2+1>mx$ 对于任何实数 x 都成立．因此结论应是当 $0\leqslant m<4$ 时，原不等式对于任何实数 x 都成立．

师：解这类题时，不少同学一看有 x^2 项就认为是一元二次方程，而不考虑二次项系数是否会等于零的情况，这往往会出现错误．例如，问：方程 $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0$ 是否有实数根？若有实数根，试求出它的实数根．有些同学是这样解的：

$$\begin{aligned} \because\quad \Delta &= [-(2m+3n)]^2-4\times 3m\times 2n \\ &=4m^2+12mn+9n^2-24mn \\ &=4m^2-12mn+9n^2 \\ &=(2m-3n)\geqslant 0. \end{aligned}$$

所以，原方程有两实数根：

$$x=\frac{(2m+3n)\pm(2m-3n)}{6m},$$

即

$$x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{n}{m}.$$

答：原方程的两根为 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=\frac{n}{m}$.

大家看解法有问题吗？

生：从刚才的解题过程中，可以看出只有当方程确实是一元二次方程时，即只有当二次项系数不为零时，这种解法才是正确的．否则就不能用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 来断定方程必有两个实数根．正确

的解法应分情况来进行讨论.

(1) 当 $m\neq0$ 时,由上述解法可知:原方程有两个实数根,其根为

$$x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{n}{m}.$$

(2) 当 $m=0$, $n\neq0$ 时,原方程变为

$$-3nx+2n=0,$$

$$x=\frac{2}{3}.$$

原方程有一个实数根,其根为 $x=\frac{2}{3}$.

(3) 当 $m=0$, $n=0$ 时,原方程有无数多个实数根,其根为一切实数.

三、布 置 作 业

课本习题(略).

补充题:

1. 证明关于 x 的方程 $mx^2+(m+1)x+\frac{1}{3}=0$, 一定有实数根($m$ 为实数).

2. m 是什么实数时,方程

$$(m-1)x^2-2(m-1)x+m-2=0$$

有两个不相等的实数根.

3. 若不等式 $(a-2)x^2+(a-2)x-4<0$ 对一切实数 x 都成立,求 a 的取值范围.

4. 根据以下的条件,求 m 的值或 m 的取值范围.

(1) 二次函数 $y=(m-1)x^2-2mx+(3m-2)$ 的图象与 x 轴的正半轴交于两个不同点.

(2) 二次函数 $y=(m^2+4m-5)x^2-2(m+1)x+3$ 的图象和 x 轴不相交.

二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间的关系

杨文泰（江苏南京航空学院附中）

作　者　简　历



杨文泰　广东中山人，1963年毕业于北京师范大学数学系，同年任南京第九中学数学教师．1987年被评为江苏省中学数学高级教师．1980年、1981年被评为省、市劳动模范，1982年、1983年被评为省、市三八红旗手，1984年、1986年、1988年被评为南京市优秀教师，1989年被评为全国优秀教师．现任南京航空学院附属中学数学教师．

教学目的

(1) 以二次函数为主线，以数形结合的方式揭示出二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间的内在联系．

(2) 使学生能灵活地运用这些规律确定一些参数的值，并培养学生归纳、总结的能力．

教学过程

一、复习旧知识，引出新内容

师：我们已经学习了二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法、根的判别式以及根与系数的关系，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 $ax^2+bx+c<0$）的解法. 从表面上看，这三者之间有一个共同点都是"一元二次"的，那么它们之间是否有更深的内在联系呢？

（教师边讲边板书课题：二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间的关系.）

师：先请同学们考虑以下几个问题.

（出示小黑板.）

问题 1 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1，那么

方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是________；

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是________；

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是________.

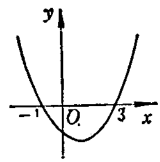


图 1

问题 2 如果不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq0)$ 的解集是 $x\neq2$ 的一切实数，那么函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有________个交点，它们的坐标是________，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是________.

问题 3 如果方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 没有实数根，那么函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有________个交点；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是________________.

（让学生思考片刻后回答.）

生甲：在问题 1 中，图象与 x 轴有两个交点 $(-1, 0)$，$(3, 0)$，即方程的根是 $x_1=-1$，$x_2=3$.

当 $x>3$ 或 $x<-1$ 时，图象在 x 轴的上方，即不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $x>3$ 或 $x<-1$.

当 $-1<x<3$ 时，图象在 x 轴的下方，即不等式 $ax^2+bx+c<$

0 的解集是 $-1<x<3$.

（学生只说答案时，教师要求学生说出理由，突出二次函数图象的作用.）

师：这说明函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标是相应的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ （或 <0）的解集只要看 x 取何值时，相应的二次函数的图象在 x 轴的上方（或下方）即可. 请同学们再看问题 2.

生乙：一个公共点，其坐标是(2, 0)，方程的根是 $x=2$.

师：能画图说明吗？

生乙：能！

（学生乙在黑板上作出图 2.）

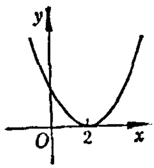


图 2

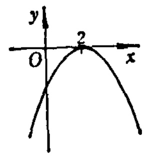


图 3

师：如果抛物线的开口向下，对吗？为什么？

（教师在黑板上作出图 3.）

生乙：不对！这图表示函数 $y=ax^2+bx+c$ 除了在 $x=2$ 处等于零外，其余处都小于零，即不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是空集.

师：很好！这说明由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $x\neq2$ 的所有实数，不仅可以断定函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴只有一个公共点，而且还可确定其开口向上. 但要注意，这时相应的二次方程有两个相等的根，即 $x_1=x_2=2$. 再看问题 3.

生丙：没有公共点，但函数图象的开口方向不能确定. 若 $a>0$，则不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集；若 $a<0$，则不等式

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是一切实数.

（教师在黑板上画出图 4、图 5.）

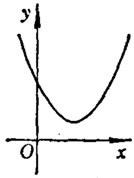


图 4

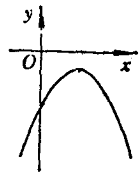
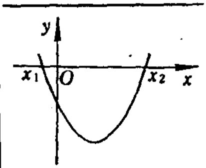
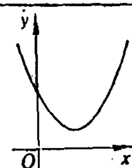


图 5

二、研讨新知识

师：由以上三个问题，我们可以发现，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点反映了方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况；而从函数图象在 x 轴上方或下方可以确定相应的二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 <0）的解集. 这说明二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间存在着内在的联系. 现在，我们用表格把这种联系反映出来.

（教师出示课前预制好的表格，让学生在表格内的空白处填写适当的内容.）

判别式 $\Delta=b^2-4ac$			
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象			
二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根			
二次不等式的解集 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$			
二次不等式的解集 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$			

师：请大家讨论一下，如何填写上表．我请三位同学上来填写，一人填写一列．

（学生填写完毕后，让同学们翻开课本对照．）

师：从表格中可以看出，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象反映了它相应的二次方程和二次不等式的解的情况．二次函数的图象与 x 轴交点的情况可由判别式 Δ 取正值、零、负值来确定．抓住这两点，我们可以进一步讨论以下三个问题．

（出示小黑板．）

问题 4 m 取何值时，抛物线 $y=x^2+(m+8)x+m+8$ 与 x 轴的两个公共点关于原点对称？

问题 5 m 取何值时，x 的二次三项式 $(m-2)x^2+2\sqrt{3}x-3$ 的值恒为负数？

问题 6 若对所有的实数 a，二次方程 $x^2+(a-8)x+12-ab=0$ 总有实根，求实数 b 的取值范围．

（教师让学生思考片刻后，请三个同学上台板演．）

生丁：由题设，抛物线 $y=x^2+(m+8)x+m+8$ 的对称轴是 y 轴，

$$\therefore \quad -\frac{m+8}{2}=0,$$

得

$$m=-8.$$

生戊：二次三项式 $(m-2)x^2+2\sqrt{3}x-3$ 的值均为负数，即不等式 $(m-2)x^2+2\sqrt{3}x-3<0$ 的解集是一切实数，

$$\therefore \quad \Delta=(2\sqrt{3})^2+12(m-2)<0, m<1.$$

生己：方程 $x^2+(a-8)x+12-ab=0$ 总有实根，即

$$\Delta=(a-8)^2-4(12-ab)\geqslant 0,$$

$$\therefore \quad a^2-16a+4ab+16\geqslant 0.$$

（学生做到这里就解不下去了，教师提示．）

师：现在我们一起来讨论黑板上的解法．先看问题 4，黑板

上的解法对不对？

(学生感到似有问题，但又说不出问题何在.)

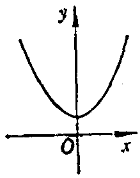


图 6

师：请大家看图6，图中抛物线虽然以y轴为对称轴，但与x轴没有公共点，这又怎么能说公共点关于原点对称呢？由此看来同学丁的解法没有排除这种反例，抛物线必须与x轴相交且以y轴为对称轴，方能满足题意，这题正确的解法应该是：

(在学生丁的板演上修改.)

抛物线必须与x轴相交，且以y轴为对称轴，

$$\therefore \quad \Delta=(m+8)^2-4(m+8)\geqslant 0, \text{ 且 } -\frac{m+8}{2}=0,$$

$$\therefore \quad m\leqslant -8 \quad \text{或} \quad m\geqslant -4, \text{ 且 } m=-8,$$

所以，当$m=-8$时，抛物线与x轴的两个交点关于原点对称.

师：我们知道，二次函数与一元二次方程有着内在的联系，大家想想看，这个题目能不能改编成一个关于二次方程的问题呢？

生庚：m取什么实数时，二次方程$x^2+(m+8)x+m+8=0$的两个根互为相反数？

师：好！这时，原来的解法依然适用．还有没有与方程知识相联系的其他解法呢？

生辛：有的！因两根x_1、x_2互为相反数，所以

$$x_1+x_2=0, \quad \text{而} \quad x_1+x_2=-(m+8),$$

$$\therefore \quad -(m+8)=0, \quad \therefore \quad m=-8.$$

师：要注意，x_1、x_2互为相反数的前提是x_1、x_2均为实数，因此，必须满足$\Delta\geqslant 0$.

如果我们把问题4的结论改为“与x轴的正半轴有两个交点”，那么如何求m的取值范围？

生：可以考虑当m取何值时，二次方程 $x^2+(m+8)x+m+8=0$ 有两个不同的正根．这时 $\Delta>0$ 且 $x_1+x_2>0$.

师：这够吗？如果 $x_1=-3$, $x_2=5$, 那么 $x_1+x_2=2>0$, 但 x_1、x_2 并不全是正数啊！

生：那可能还要满足 $x_1x_2>0$.

（学生此时的回答带有猜测的因素，教师加以首肯.）

师：对！在 $\Delta>0$ 的前提下，满足 $x_1x_2>0$, 那么 x_1、x_2 同号（同为正或同为负），再满足 $x_1+x_2>0$, x_1、x_2 就一定都是正数了．这一题完整的解法请同学们自己去整理.

请大家再想一想，问题 4 的结论还可不可以再作改变呢？

生：当m取何值时，图象与 x 轴负半轴有两个交点？图象与 x 轴正、负半轴都相交？图象经过原点？……

[引导学生进行发散思维，有利于培养学生举一反三的能力.]

师：都对！能否把这些问题改编成关于二次方程的问题呢？解题时，是直接利用函数的性质，还是应用方程的有关知识呢？请大家课后进一步思考.

现在大家来看问题 5 的解法，我们先把问题转化为有关函数的问题来加以考虑．所谓二次三项式 $(m-2)x^2+2\sqrt{3}x-3$ 的值均为负数，就是二次函数 $y=(m-2)x^2+2\sqrt{3}x-3$ 的图象都在 x 轴的下方．在学生戊的解答中，$\Delta<0$ 只能说明函数图象与 x 轴没有公共点，它可能在 x 轴上方，也可能在 x 轴下方．所以仅仅由 $\Delta<0$ 是不能判定函数 y 的值全是正的或全是负的．那么它还必须具备什么条件才能满足题意呢？

生：函数图象必须开口向下，即 $m-2<0$.

师：对！必须同时满足两个不等式 $m-2<0$ 和 $\Delta<0$．这样，问题就转化为解不等式组 $\begin{cases} m-2<0, \\ \Delta<0. \end{cases}$

（教师修改学生戊的解答.）

师：现在再来看问题6．题中指明对所有的实数a，方程都有实数根．所以同学已在解题中指出$\Delta\geqslant0$，这是对的．但要注意，是对一切实数a，不等式$\Delta\geqslant0$，即$a^2-16a+4ab+16\geqslant0$都成立，可以把这个不等式看成是关于a的一元二次不等式，即$a^2+4(b-4)a+16\geqslant0$，这样问题就转变为求使关于a的不等式恒成立的b的取值范围．

（用红粉笔描a，启发学生把a看成x加以考虑．）

生：这时只要使关于a的二次函数的判别式小于或等于零就可以了，即

$$\Delta=[4(b-4)]^2-4\cdot16\leqslant0,$$

$$\therefore\quad (b-4)^2\leqslant4,$$

$$-2\leqslant b-4\leqslant2,$$

$$2\leqslant b\leqslant6.$$

师：通过上面几个问题，我们初步了解了二次函数、一元二次方程、一元二次不等式、二次三项式这四个"二次"之间的内在联系．对于其中任一个"二次"的问题，往往可以转化为其他的"二次"问题来解决，这样就能灵活运用二次函数的图象、性质，一元二次方程根的判别式、根与系数的关系来解题了．

三、布 置 作 业

1．m是什么实数时，函数$y=x^2-(1-m)x+m$的图象经过原点．

2．m是什么实数时，方程$x^2+2(m-1)x+3m^2=11$两实根异号．

3．a是什么实数时，不等式$ax^2+ax-1>0$的解集是空集．

4．试证对于任何实数k，二次三项式$x^2-(k+1)x+k$在实数范围内一定能分解因式．

5．根据本课的内容，自编自解一题．

教 案 说 明

这节课是复习课．对于二次函数的图象与性质，一元二次方程的解法、根的情况、根与系数的关系，一元二次不等式的解法，二次三项式的因式分解等内容，学生都已学过了．但这些知识在学生头脑中是孤立的，零碎的．通过这节课，以二次函数的图象和性质为主线，把一元二次方程、一元二次不等式、二次三项式的知识串起来，使学生能更灵活地应用这四个“二次”的内在联系去解决较综合的习题．

这节课的设计遵循了由特殊到一般，再由一般到特殊这样一条认识规律．首先由3个小问题引导学生从中发现二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间所存在的关系，即给出其中一个“二次”所满足的条件，便可确定其他两个“二次”所适合的条件．在这种感性认识的基础上，再引导学生总结一般规律．对此，我采用事先画好留有空格的表格，让学生填写，使他们能够有条理地总结出规律．然后教师提出3个确定参数的问题，让学生议论、板演，运用规律．最后，我紧扣函数图象通过“形”来提高学生对函数值、方程的根、不等式的解集等概念的全面正确的认识．另外，本课开始时所设计的3个问题有三个层次：(1)由形到数，直观易答；(2) 由数到形，须动脑筋；(3) 数形结合，还须讨论．后来提出的3个问题也体现了这样的三个层次．而且在分析学生解答时，又增加了提问，目的是为了让学生在课堂上始终处于积极思维的状态，促使学生自己动脑，纠正一些片面或错误的认识．

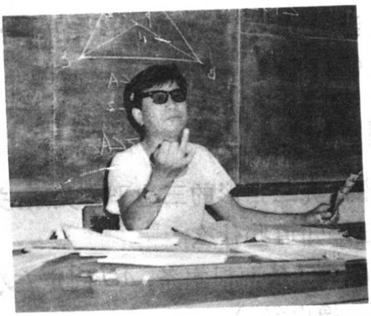
有意让学生暴露一些片面或错误的认识，能使学生更深刻地获取知识．例如，要使一元二次方程的两实根互为相反数，学生常犯的典型错误是只考虑 $x_1+x_2=0$，而不考虑 $\Delta\geqslant 0$．如果教师只从正面强调判别式必须大于等于零，学生的印象不会深．只有设法让他们的错误暴露出来，通过全体学生的共同思考、讨论(甚至争论)，才能有效地克服错误．

这节课的最后3个问题，实质上是寻求“充要条件”的问题，但学生往往误解为求“必要条件”．问题4、5错解的根源便在于此，但初三的学生没有学过“充要条件”这一概念，因此讲课时要特别注意这一点．拿问题4来说吧，学生只考虑由“抛物线与x轴的两个公共点关于原点对称”能得出“抛物线关于y轴对称”，而没有考虑由“抛物线关于y轴对称”能否得出“抛物线与x轴的两个公共点关于原点对称”．因此，这时教师要结合图形适当地提出反例，帮助学生全面考虑问题，去得出正确结论．

余弦定理的证明

李开成（吉林东北师大附中前炼分校）

作 者 简 历



李开成　山东肥城人，1948年毕业于长春大学数学系，1950年起任吉林省高中数学教师，1957年后曾在长春一中、三中及宽城区教师进修学校任教. 1987年、1988年先后被评为吉林省中学高级教师、特级教师. 曾任东北地区及省、市中学数学教育研究会理事，长春市宽城区人大常委，现任东北师范大学附属中学分校教师.

教 学 目 的

(1) 使学生对三角形的三边平方关系获得一个全面而系统的认识.

(2) 使学生掌握余弦定理的证明方法，并对解析法有一个初步了解.

教 学 过 程

一、复 习 提 问

师：如图1，已知$|OP|=r$，$\angle xOP=\alpha(90^\circ<\alpha<180^\circ)$．求点$P$的坐标$(x, y)$．

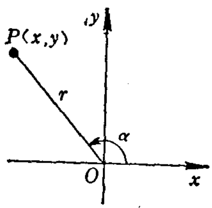


图 1

生：$\begin{cases} x=r\cdot\cos\alpha, \\ y=r\cdot\sin\alpha. \end{cases}$

师：（追问）(1) 当$0^\circ<\alpha<90^\circ$时，也有这一结果吗？

(2) 当$\alpha=90^\circ$时，也有这一结果吗？

生：（回答略）．

二、引 入 新 课

师：同学们，这节课我们来研究三角形的三边平方关系．关于三角形的三边平方关系，你们已经知道些什么？

（挂出图2所示的教具，AB、AC是两根木条，AC固定在小黑板上，AB可绕点A旋转，BC是橡皮筋．）

生：当$\alpha=90^\circ$时，$a^2=b^2+c^2$．

师：当α是锐角时，a^2还等于b^2+c^2吗？

（转动BA使$\angle BAC$变为锐角．如图3所示．）

生：不等了．

师：此时，a^2比b^2+c^2大还是小？

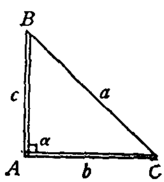


图 2

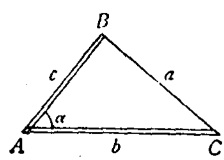


图 3

生：小.

师：小多少？即

$$a^2=b^2+c^2-? \quad ①$$

（板书上式后，转动 BA 使 $\angle BAC$ 变为钝角.）

师：请你们继续观察，当 α 为钝角时，a、b、c 三边的平方关系又是怎样的呢？

生：$a^2>b^2+c^2$.

师：大多少呢？即

$$a^2=b^2+c^2+? \quad ②$$

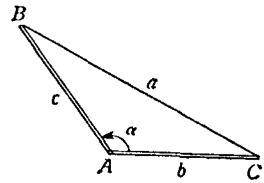


图 4

师：通过以上的观察可知，当 $\alpha\neq 90°$ 时，有 $a^2=b^2+c^2\pm$|与 α 有关的量|.

这里，当 α 为钝角时取加号，锐角时取减号.

[由直观的观察到抽象的思维，逐步归纳出定性的结论.]

师：究竟在①式中应减多少，而在②式中又须加多少，这有待我们作进一步的研究.

显然减去或加上的这个量应是个与 α 有关的量，因此问题可归结为已知 b、c、α 如何计算 a，亦即

"已知三角形的两边及其夹角，如何求第三边".

（板书并提出本课的课题.）

下面请同学们运用你们学过的知识来解决这一课题.

三、师 生 探 究

师：先写出这个问题的已知、求.

已知：$\triangle ABC$ 的边 b、c 及夹角 α.

求：$a=?$

这里，求 a 相当于求 B、C 两点间的距离，你有什么办法吗？

生甲：用勾股定理.

生乙：用两点间的距离公式.

师：很好！这两种方案均可．现在我们不妨采用第二种方案，你们课后再试用第一种方案去求．

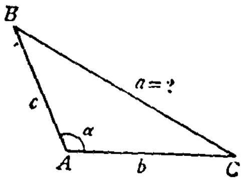


图 5

师：同学们想想看，要用两点间的距离公式求 BC 之长，必须具备哪些前提条件？

生：必须有直角坐标系，以及 B、C 两点的坐标．

师：现在我们有这些条件吗？

生：没有．

师：没有，怎么办？（稍停，让学生思考片刻．）没有也无妨．数学的奥妙就在于"无中生有"．我们可以建立一个坐标系．比如以 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为坐标原点，射线 AC 为 x 轴的正半轴，建立一个直角坐标系．

生：老师，我们有这样两个问题：

(1) 是否必须建立这样一个坐标系呢？

(2) 选取这一坐标系有何优点？

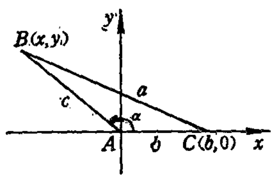


图 6

师：坐标系可以任意选取，但必须考虑到计算上的方便．你们看，建立了这一坐标系之后，A、B、C 三点的坐标好不好求啊？求一下！

生：$A(0,\ 0)$，$B(c\cos\alpha,\ c\sin\alpha)$，$C(b,\ 0)$．

师：在选取这一坐标系后，三点坐标极易求得．这说明建立这一坐标系是十分有利的．现在请你们自己去计算一下 $a^2=?$

（放手让学生自己去计算，教师巡视，对有困难的同学给予适度启导．）

生：$$\begin{aligned}a^2&=(b-c\cos\alpha)^2+(-c\sin\alpha)^2\\&=b^2-2bc\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha+c^2\sin^2\alpha\\&=b^2+c^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2bc\cos\alpha\end{aligned}$$

$=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$

师：此结果即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A. \quad (1)$$

师：你能用数学语言表述(1)式吗？

（先让学生试述，最后阅读课本的表述.）

生：三角形中，一边的平方等于其他两边平方的和，减去这两边与它们夹角余弦的积的两倍.

师：请你们根据上面的叙述完成以下的等式.

$b^2=$________，$c^2=$________.

生：

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B, \quad (2)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C. \quad (3)$$

师：(1)、(2)、(3)三组公式叫做余弦定理. 上述公式的推导过程，对任意的α均有效，因此本定理揭示了一般三角形中的三边平方关系.

请同学们考虑一下，余弦定理与勾股定理有什么关系？

生：当$\angle A=90°$时，$\cos A=0$，从而(1)式就是勾股定理了.

师：由此可见，余弦定理是勾股定理的推广，而勾股定理是余弦定理的特例.

四、总结与回顾

师：同学们，本节课我们证明了余弦定理. 请考虑本定理的证明与以往几何定理的证明，在方法上有何不同？本定理的证明方法有何特点？

生：过去的几何证明是用演绎推理进行论证的，而本定理是借助于直角坐标系，利用点的坐标，通过计算完成证明的.

师：这种借助直角坐标系来证明几何问题的方法叫做坐标法或解析法.

请同学们回顾一下，本定理证明的主要步骤以及每一步骤的具体内容.

生：主要步骤是：

(1) 建立直角坐标系；

(2) 求出有关点的坐标；

(3) 用公式进行计算并推出结论.

师：同学们，请大家再考虑一下，解析法与演绎法相比有何优点？

（学生思考、议论后，教师归纳总结.）

师：解析法优点是：

(1) 解脱引辅助线之难点；

(2) 以算代证降低了思维难度；

(3) 证明具有一般性.

五、课堂练习

1. 根据公式(1)回答：

(1) 当 α 为锐角时，a^2 比 b^2+c^2 小多少？

即
$$(b^2+c^2)-a^2=?$$

(2) 当 α 为钝角时，a^2 比 b^2+c^2 大多少？

即
$$a^2-(b^2+c^2)=?$$

2. 用解析法证明：

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B.$$

六、布置作业

1. 用勾股定理证明 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$.

（按 A 为锐角或钝角两种情况分别证明.）

2. (1) 证明：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

(2) 三角形三边分别为 15、20、25，用余弦定理求最大角.

3. 思考题：余弦定理有哪些用途？

教案说明

(1) 本节课的难点有两个：一是求点 B 的坐标；二是建立直角坐标系. 对于求点的坐标，我设计了一个求点 P 的坐标的复习题，以期分散难点并为学生自已推导公式，铺平道路. 对于建立坐标系，我采取了提问的方式，引导学生把求 a 的问题归结为求 B、C 两点间的距离问题，这样学生就比较自然地联想到需要建立直角坐标系. 但如何选取坐标系，则是学生无法想到的. 因此，我作了讲述.

(2) 教师要恰如其分地利用教具进行演示. 本课中的教具演示，使学生直观生动地观察到：当 α 为锐角时，$a^2<b^2+c^2$；当 α 为钝角时，$a^2>b^2+c^2$. 然后提出小多少、大多少的问题，得出 $a^2=b^2+c^2\pm$ 与 α 有关的量 的定性结论. 由此结论把问题归结为已知三角形的两边及其夹角求第三边. 继之又归结为求 B、C 两点间的距离，从而想到用解析法解之. 这一引入诱导过程，充分体现了以培养学生观察、归纳发现的能力为目的教学思想，取得了良好的教学效果.

(3) 在传授知识的同时要注意突出数学思想方法. 本课中，我有意识地突出"解析法"这一重要的数学思想方法，以期使学生对此有一个初步的认识与了解(这里并不要求完全掌握它). 这里既讲知识又讲思想方法，在传授知识的同时，多方面地发展学生的能力(观察、发现、概括、表述……).

对教材的处理，我进行了一些加工和安排，使课堂教学生动活泼. 在教学中，除了在难点与关键处给以适度的启示与点拨之外，尽量引导学生去独立探索和思考. 凡学生力所能及之处，教师一概不包办代替，在课堂内最大限度地给学生创造思维自由驰骋的时间和空间. 问题由教师提出，而结论则由学生通过一定的智力活

动后而独立获得。

此外，全部教学过程都是通过师生对话的形式展开的．这样保证了师生思维的同步进行，教师用一系列精心设计的问题提问学生，学生必须不断地思考如何回答，因此在全部教学过程中，呈现出积极思考的紧张气氛．可能有人认为这种做法，不如由老师照本讲直截了当，而且节省时间．然而老师讲学生听的注入式教学，对发展学生的能力和训练学生思维是没有多大效果的．课堂教学的任务不仅是传授知识，还要培养能力，训练思维，因此必须从双重任务上设计我们的课堂教学．

用余弦定理及方程(组)解斜三角形

高路平（陕西西安市教育科学研究所）

作者简历



高路平　江苏常州人，1959年毕业于西安师范专科学校数学专业，同年任西安市第三中学数学教师．1987年被评为陕西省高级教师．现任西安市教育科学研究所教研员、数学组组长，西安市中学数学教研会秘书长．

教学目的

(1) 在学过“已知三边或两边及其夹角，用余弦定理解斜三角形”的知识基础上，进一步学习用余弦定理结合方程组的有关知识来解决其他类型的斜三角形问题．

(2) 通过对一个题目采取多种解法，提高学生灵活应用知识的能力及多种解题技巧和技能．

教学过程

一、以“旧”引“新”

师：请同学们回答两个问题：叙述正弦定理、余弦定理的内容；利用余弦定理可以解决哪些类型的斜三角形问题？

（学生叙述正(余)弦定理略.）

生：余弦定理可以解决“已知三边,求各角”以及“已知两边和夹角,求第三边和其他两个角”这两类斜三角形的问题.

师：对！请同学们一起思考：余弦定理是否只能用来解决这两类斜三角形问题呢？

（这时,课堂气氛活跃起来了,学生议论纷纷,意见分歧,有的认为“可以”,有的认为“不可以”.）

师：请同学甲（中等水平的学生）谈谈你认为“不可以”的理由.

生甲：课本上明确指出：“利用余弦定理可以解决以下两类解斜三角形问题：

(1) 已知三边,求三个角；

(2) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.”

而且课本中所举的例题也只限于解这两类斜三角形问题.

师：这位同学找出现行课本作为依据，可以看出他对课本内容比较熟悉，但大家考虑一下他说的“理由”充足吗？课本中“利用余弦定理可以解决……”中的“可以解决”与“只能解决”是同一个含义吗？

（教师指定一位优等生回答这个问题.）

生乙：含义不同！课本上说余弦定理可以解决这两类斜三角形问题,并不等于说余弦定理不能解决其他类型的斜三角形问题.原因是这两类斜三角形问题比较一般和常用. 因此课本中举的例子也是这两类常见的问题,但我们不能因此而产生误解,轻易断定余弦定理的作用仅限于解决这两类斜三角形问题. 至于用余弦定

理怎样去解决其他类型的斜三角形问题，对我来说是个新问题，一时想不出来.

（学生乙的回答，引起了同学们的关注和思索，急等着老师来解决问题.）

师：同学乙言之有理，条理清楚，对课文中的词句领会得较为深刻，同时，诚实地谈出了自已解答不了这个新问题．这是做学问所应有的态度，值得大家学习.

今天这节课就是要解决这一问题："用余弦定理及方程组解其他类型的斜三角形."

（板书新问题.）

[这样引入课题，不仅能克服像学生甲那样的同学对课本内容所产生的片面认识，而且能够通过问题引起学生的注意，提高学生的学习兴趣.]

师：先请大家看这样一个例子.

（出示小黑板.）

[例 1]　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，$a=2\text{cm}$，$c=\sqrt{6}\text{ cm}$，解此三角形.（可查表）.

师：这是一个已知两边和其中一边的对角解斜三角形的问题，对这类问题可用哪些知识来解决呢？

生(众)：正弦定理.

师：请同学们在练习本上做，请学生丙(中下程度)板演.

生丙：解：根据正弦定理，得

$$\frac{2}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C},$$

即

$$\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故

$$C=60°.$$

由三角形内角和定理，得

$$B=75°.$$

再由正弦定理，得

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 75^\circ},$$

$$b\approx\sqrt{2}\times 2\times 0.9659\approx 2.731.$$

故 $$\angle C=60^\circ,\ \angle B=75^\circ,\ b\approx 2.731(\text{cm}).$$

师：请大家观察同学丙的解题过程是否正确？

生丁：解答不够完整．因为当 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，有两个解 $C_1=60^\circ$，$C_2=120^\circ$，那么由三角形内角和定理得 $\angle B$ 也有两个解 $B_1=75^\circ$，$B_2=15^\circ$．这样，再应用正弦定理，得

$$b_1\approx 2.731(\text{cm}),$$

$$b_2=\frac{2\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}\approx 2\times\sqrt{2}\times 0.2588\approx 0.731(\text{cm}).$$

因此所得的 $\angle C$、$\angle B$ 和 b 都有两个解，即除了同学丙所得一个解外，还有另一解 $\angle C=120^\circ$，$\angle B=15^\circ$，$b\approx 0.731\text{cm}$．

师：回答完全正确．应用正弦定理解决"已知两边和其中一边的对角解斜三角形的问题"是一种较常用的解题方法，同学们容易掌握它，但在解题过程中，大家往往因考虑不周容易漏掉一个解，对此应引起足够重视．现在请大家思考这样一个问题：例1除了用正弦定理解外，能否开始就用余弦定理来解呢？

（这时，课堂气氛又开始活跃了，有的说："不能！"有的抢着举手发言，争论不休，但个别同学却束手无策．）

生：（中上程度）能！

（教师请他板演．）

解：由余弦定理，得

$$2=b^2+(\sqrt{6})^2-2b\cdot\sqrt{6}\cos 45^\circ,$$

即 $$b^2-\sqrt{12}b+2=0.$$

故 $$b_1=\sqrt{3}+1,\ b_2=\sqrt{3}-1.$$

由正弦定理，得

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin B_1},\quad 即\quad \sin B_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

近似计算后查表得 $B_1=75^\circ$；

又 $$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sin B_2},\quad 即\quad \sin B_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

近似计算后查表得 $B_2=15^\circ$.

根据三角形内角和定理得

$$C_1=60^\circ,\ C_2=120^\circ.$$

所以，
$$b_1=\sqrt{3}+1,\ B_1=75^\circ,\ C_1=60^\circ;$$
$$b_2=\sqrt{3}-1,\ B_2=15^\circ,\ C_2=120^\circ.$$

二、辨 析 归 纳

师：刚才同学们用两种方法解决了例1，同学们能否对这两种方法加以总结、归纳呢？

（让学生稍加思考后回答，教师从中给予适当的补充.）

生：(1) 对于已知两边和其中一边的对角解斜三角形的问题，可以先用正弦定理求出另一边的对角，再求得其他的边与角. 这是一般的解题思路，但也可先用余弦定理求出第三条边，再求出其他的边与角. 这表明应用余弦定理可以解决新的斜三角形类型的问题.

(2) 以上两种解法各有优缺点：第一种解法具有一般性，属常用的解题思路，缺点是常会造成解的遗漏；第二种解法把余弦定理与解方程结合起来去解决问题. 一般不易想到，但这种解法可以保证解的完整性.

师：总结得好！为了让大家领略一下第二种解法的优越性，请看下例.

（出示小黑板.）

［例2］ 如图1，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 AC 上一点，$AD=20\text{cm}$，

$AB=31\text{cm}$, $BD=21\text{cm}$, $\angle C=60°$, 求 AC、BC 的长(不能查表).

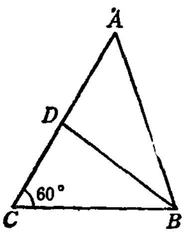


图 1

(教师让学生在练习本上进行练习,并请两位同学板演.)

生甲:(解一) 在 $\triangle ADB$ 中,

$$\cos A=\frac{AD+AB-BD}{2AD\cdot AB}=\frac{920}{1240}=\frac{23}{31}.$$

(由于 $\cos A=\frac{23}{31}$ 不是特殊值, 又规定不能查表. 许多同学至此不会利用 $\sin A=\sqrt{1-\cos A}$ 进行转化, 以致无法解下去,教师予以提示.)

$$\sin A=\sqrt{1-\cos A}=\frac{12}{31}\sqrt{3}.$$

又在 $\triangle ABC$ 中,

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A},$$

故 $$BC=24\text{cm}.$$

在 $\triangle BCD$ 中,

$$BD=CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cdot\cos C,$$

$$21^2=CD^2+24^2-2CD\cdot 24\cdot\cos 60°,$$

即 $$CD^2-24CD+135=0.$$

解得 $CD_1=15$, $CD_2=9$.

故 $AC_1=20+15=35(\text{cm})$, $AC_2=20+9=29(\text{cm})$.

生乙:(解二) 求得 $BC=24\text{cm}$ 之前同解一.

又在 $\triangle ABC$ 中,

$$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C,$$

$$31^2=24^2+AC^2-2\cdot 24\cdot AC\cdot\cos 60°,$$

即 $$AC^2-24AC-385=0.$$

解得 $AC_1=35$, $AC_2=-11$(负值舍去).

故 $$AC=35\text{cm}.$$

师：上面这两种解法是否正确呢？请大家分小组讨论，而后派代表发言.

(这时学生情绪高涨，前后四人为一组，进行热烈讨论，教师对程度较差的小组进行辅导.)

生甲：我们认为解一是正确的. 因为它得到的 CD 有两个解，从而 AC 也有两个解；而解二只得到一个解，而将另一解漏掉了.

生乙：解多不一定就正确. 我们认为解二正确.

师：一道题以解的多少来判定解法的正确性，并不科学，对具体问题我们要作具体分析. 现在的问题是要判定解一所得到的 $CD_2=9$ cm 是不是这个三角形的解. 请大家思考一下再回答.

生丙：我们认为解二是正确的. AC 的长只有一个，就是 35 cm，而解一中 $CD_2=9$ cm 并不适合题意，应当舍去. 因 $\cos A\approx0.741$，$\angle A\approx45°$，这样根据三角形内角和定理可知 $\angle B\approx75°$，那么在 $\triangle ABC$ 中 $\angle B>\angle C$，因此 $AC>AB$. 如果 $CD=9$ cm，那么 $AC=20+9=29$ (cm)，这样就有 $AC<AB$，这与我们根据几何定理所导出的 $AC>AB$ 相矛盾. 所以 $CD_2=9$ cm 不是例 2 的解.

师：学生丙的发言完全正确. 现在我再提一个问题：这道题有没有更为简捷的解法？

(学生情绪更加激昂，纷纷展开讨论.)

生：有！利用例 1 的第二种解法，把余弦定理与方程组结合起来解更为简捷.

(学生板演解三.)

设 $AC=x$ cm，$BC=y$ cm，由余弦定理，得

$$\begin{cases}31^2=x^2+y^2-2xy\cos 60°,\\21^2=(x-20)^2+y^2-2(x-20)y\cos 60°,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=31^2, & ① \\ x^2+y^2-xy-40x+20y=41. & ② \end{cases}$$

(①－②)÷20，得

$$y=2x-46. \qquad ③$$

由 ③ 代入 ①，解得

$$x_1=35,\ x_2=11.$$

分别代入 ③，得

$$y_1=24,\ y_2=-24(舍去).$$

故 $AC=35\,\text{cm},\ BC=24\,\text{cm}.$

师：很好！说明他已掌握了刚才所介绍的那种新方法．现在请一位同学分析一下上述三种解法的特点．

生：第一种解法是常用的解题方法容易掌握，但在实际解题过程中却有一定难度．如当求出 $\cos A$ 后，必须利用 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ 求出 $\sin A$，才能继续解下去，更麻烦的是要讨论解的合理性；而第二种解法却能保证所得结果的合理性，无需再加以讨论；第三种解法将余弦定理与方程组的有关知识综合起来去解决问题，不仅计算简捷，而且又能保证解的合理性．因此，这种解题的思想方法较为可取．

三、变式练习

师：同学们刚才总结了三种解题方法的优劣，现在我们来进行变式练习．

（用小黑板挂出变式练习内容，并请两位同学板演．）

在 $\triangle ABC$ 中，边 a、b、c 的对角分别为 A、B、C，已知 $a=2$，$B=60°$，$b:c=\sqrt{6}:2$，求 b、c 及 C．

生甲：解：由正弦定理

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

得 $\sqrt{6}:2=\sin 60°:\sin C,\ \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\therefore\quad C_1=45°,\ C_2=135°.$$

(C_2 不符合三角形内角和定理，舍去.)

由三角形内角和定理，得

$$A=75°.$$

由正弦定理，得

$$\frac{2}{\sin 75°}=\frac{b}{\sin 60°},$$

$$\therefore\quad b=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

又 $b:c=\sqrt{6}:2,$

$$\therefore\quad (3\sqrt{2}-\sqrt{6}):c=\sqrt{6}:2.$$

$$\therefore\quad c=2(\sqrt{3}-1).$$

因此 $C=45°,\ A=75°,\ b=\sqrt{2}(3-\sqrt{3}),\ c=2(\sqrt{3}-1).$

生乙：解：设 $b=\sqrt{6}k,\ c=2k$，由余弦定理，得

$$(\sqrt{6}k)^2=2^2+(2k)^2-2\cdot 2k\cdot 2\cdot\cos 60°,$$

$$k^2+2k-2=0.$$

解得 $k_1=\sqrt{3}-1,\ k_2=-\sqrt{3}-1$（负值舍去）.

故 $b=\sqrt{2}(3-\sqrt{3}),\quad c=2(\sqrt{3}-1).$

由题设知 $\frac{c}{b}=\frac{2}{\sqrt{6}}$，代入正弦定理，得

$$\sin C=\frac{c\cdot\sin B}{b}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解得 $C_1=45°$ 或 $C_2=135°$(不符合三角形内角和定理,舍去).

因此

$$b=\sqrt{2}(3-\sqrt{3}),\ c=2(\sqrt{3}-1),\ C=45°,\ A=75°.$$

师：两位同学的解法都很好，特别是同学乙巧妙地运用了余弦定理，简捷地解决了问题，值得以后借鉴.

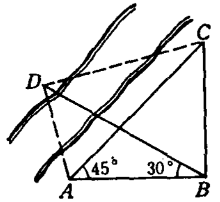
四、课堂小结

师：通过今天这节课的学习，大家对余弦定理的应用有了新的了解，知道余弦定理不仅可以解决课本中所提出的两种类型的斜三角形问题，而且还可以解决其他类型的斜三角形问题. 与此同时我们学会了用余弦定理结合方程组的有关知识去解决斜三角形问题的方法，这对提高解题的技能、技巧是很有益的，希望同学们回去后再做些习题加以复习与巩固. 余弦定理的应用很广，以后还要继续学习。

五、布置作业

1. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=75°$，$\angle ACB=60°$，D 是 $\triangle ABC$ 内的一点，且 $\triangle DBC$ 是等腰直角三角形，求证：D 是 $\triangle ABC$ 的外心.

2. 如图，A、C、D 是河两岸的三根电线杆，测得 $\angle BAC=45°$，$\angle ABD=30°$，$\angle CAD=\angle DBC=60°$，$AB=150$ 米，求 A 与 D，D 与 C 两点之间的距离？



(第 2 题)

教案说明

(1) 本节课的重点是培养学生运用知识的能力. 因此，在不超大纲、不超课本内容的基础上安排了比较典型的例题，通过教师的启发、诱导，学生的练习和辨析、归纳，培养学生综合解题的技能和技巧.

(2) 在初三代数教材“解三角形”一章中，对于解的讨论是学生学习的一个难点，本节课虽然不是重点讲解这部分内容，但每个例题中都有目的地贯串着这方面的知识内容，目的是通过练习引起学生对此的注意，防止解题中的错误出现.

(3) 本节课提供了一个新的解题思想方法——用余弦定理结合方程(或方程组)的有关知识综合解决斜三角形问题，目的是为了提高学生的解题能力，开阔思路，培养学生综合解题的技巧.

(4) 本课设计的内容偏多些，对“变式练习”内容，可按实际情况处理. 有的可作为课外作业，有的可作为教学参考，以保证有充裕时间去分析例 1、例 2 的解题思路.

正弦定理和余弦定理的应用

何广荣（江苏省镇江一中）

作 者 简 历



何广荣　江苏镇江人．1942年毕业于苏州工业专科学校，同年任镇江市钟粟中学数学教师．1985年被评为江苏省中学特级教师，1988年被评为中学高级教师．曾多次荣获镇江市先进工作者称号，现任江苏省中小学数学研究会理事，镇江市中小学数学教学研究会理事长．

教 学 目 的

(1) 使学生能较熟练地运用正弦定理和余弦定理解斜三角形．

(2) 通过正弦定理和余弦定理来解较简单的综合题，加强代数、几何与三角之间的联系，初步培养学生综合运用知识的能力．

(3) 能灵活地运用解斜三角形的方法解决实际应用问题．

教 学 过 程

一、课 题 引 入

师：同学们，我们前面已讲了正弦定理和余弦定理，大家都知道这两个定理是解斜三角形的主要依据．今天，进一步介绍有关正弦定理和余弦定理的应用，使同学们对这两个定理有更深刻的认识．

二、讲 解 例 题

师：先请大家看几个例题．

[例 1] 如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$a:b:c:d=1:3:1:2$，$\angle ABC=\alpha$，$\angle DAB=\beta$．

求 $\cos\alpha$、$\sin\alpha$、$\sin\beta$ 的值．

我们知道，三角形中有正弦定理和余弦定理，而例 1 是一个四边形的问题，如何把它转化为三角形的问题来解决呢？具体地讲，就是怎样添作一条辅助线，使角 α 和角 β 能在同一个三角形内，从而求出 $\cos\alpha$、$\sin\alpha$、$\sin\beta$．

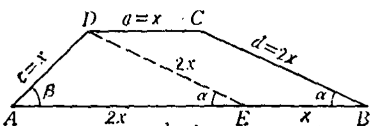


图 1

生：如图 1，作 $DE\parallel CB$，则 $\angle AED=\alpha$．

师：设 $DC=a=x$，由已知 $AB=b=3x$，$AD=c=x$，$BC=d=2x$，能否求出 DE 与 AE？

生：$DE=d=2x$，$AE=AB-BE=3x-x=2x$，

师：在 $\triangle ADE$ 中，如何求出 $\cos\alpha$？

生：由余弦定理，得

$$\cos\alpha=\frac{AE^2+DE^2-AD^2}{2AE\cdot DE}=\frac{4x^2+4x^2-x^2}{2\cdot 2x\cdot 2x}=\frac{7}{8}.$$

师：如何求 $\sin\alpha$？

生：$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos\ \alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)}=\frac{\sqrt{15}}{8}$.

师：在 $\triangle ADE$ 中，已求出 $\sin\alpha$，怎样求 $\sin\beta$ 呢？

生：由正弦定理 $\frac{DE}{\sin\beta}=\frac{AD}{\sin\alpha}$，

即
$$\frac{2x}{\sin\beta}=\frac{x}{\frac{\sqrt{15}}{8}}.$$

$$\therefore\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

师：很好！同学们通过添作一条辅助线，将四边形问题转化为三角形问题，然后运用学过的知识加以解决，这是一种解题的思想方法，必须掌握它，请大家再看一例.

[例2]　在 $\triangle ABC$ 中，若三边 a、b、c 满足 $a+c=2b$，试证明一元二次方程 $(\sin B-\sin A)x^2+(\sin A-\sin C)x+\sin C-\sin B=0$ 有两个相等的根.

在三角形中，角的正弦与边的关系怎样？

生：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}.$$

（R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.）

师：能否用边来表示原方程的系数呢？

生：原方程可化为 $(b-a)x^2+(a-c)x+c-b=0$.

师：方程有相等根的条件是什么？

生：只要使判别式 $\Delta=0$.

师：对，这样解题思路就明确了，请同学们解这道题目.

生：
$$\begin{aligned}\Delta&=(a-c)^2-4(b-a)(c-b)\\&=a^2-4ab+4b^2+2ac-4bc+c^2\\&=(a-2b+c)^2.\end{aligned}$$

$\because a+c=2b$, $\therefore \Delta=0$, 即方程有相等的两个根.

师: 很好! 通过分析问题所存在的充要条件, 寻求解题途径, 这也是解题的方法之一. 请再看一例:

[例 3] 已知三角形的两边和为 10, 夹角为 $60°$, 求三角形面积的最大值, 三角形周长的最小值.

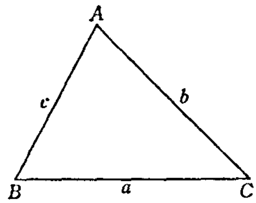


图 2

师: 如图 2, $\triangle ABC$ 中, 已知 $a+c=10$, $\angle B=60°$, 面积为 $S_{\triangle}$. 请同学们回忆一下, $\triangle ABC$ 的面积公式是什么?

生: $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C$.

师: $\because a+c=10$, $\angle B=60°$,

$$\therefore \quad S_{\triangle}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a}{2}(10-a)\sin 60°$$

$$=\frac{a}{2}(10-a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{5\sqrt{3}}{2}a.$$

这是一个二次函数, 面积有最大值, 怎样求?

生: 面积的最大值为

$$\frac{-\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{75}{4\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

师: 已知 $a+c=10$(定值), 可知求周长的最小值即为求 b 的最小值, 根据已知条件, 求 b 是用正弦定理还是用余弦定理?

生. 求 b 用余弦定理.

师: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+(10-a)^2-2a(10-a)\cdot\frac{1}{2}=3a^2-30a+100$, 设 $y=3a^2-30a+100$, 怎样求 y 的最小值?

生: y 有最小值 $\frac{4\times3\times100-(-30)^2}{4\times3}=25$.

师：所以，b 有最小值 5，所以 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 $10+5=15$.

三、讨 论，探 索

师：下面我想请同学们独立解决一些问题.

［例 4］ 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a=5$，$b=4$，且 $\cos(A-B)=\frac{31}{32}$. 求这个三角形的面积.

请同学们先思考：

(1) 若能求出 $\sin C$，则问题可解决，那么，$\sin C$ 如何求？

(2) 已知 $\cos(A-B)$ 的条件隐含着什么？如何为我所用呢？若 $\angle A$ 大于 $\angle B$ 能否作辅助线 AD，使 $\angle BAD=\angle B$ 呢？

(3) $\triangle ADC$ 中能否求出 $\cos C$ 与 $\cos(A-B)$ 呢？

（学生讨论、探索，教师辅导、解惑，并请同学上黑板解答.）

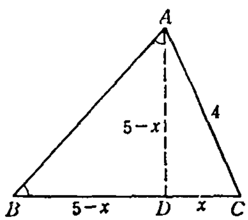


图 3

生：因 $a>b$，故 $\angle A>\angle B$. 如图 3，添辅助线 AD，使 $\angle BAD=\angle B$，则 $\angle DAC=\angle A-\angle B$，即 $\cos(A-B)=\cos\angle DAC=\frac{31}{32}$.

设 $CD=x$，则 $BD=BC-CD=5-x$，

$AD=BD=5-x$，$AC=b=4$.

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle DAC=\frac{4^2+(5-x)^2-x^2}{2\cdot4(5-x)}=\frac{31}{32}.$$

化简得
$$\frac{41-10x}{5-x}=\frac{31}{4},$$

解得 $x=1$. $\therefore$ $CD=1$，$AC=4$，$AD=5-1=4$.

在 $\triangle ACD$ 中，$\cos C=\frac{4^2+1^2-4^2}{2\cdot4\cdot1}=\frac{1}{8}$,

$$\sin C=\sqrt{1-\cos C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times4\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

[例 5] 轮渡以每小时 15 千米的速度沿 OB 方向行驶，水流以每小时 4 千米的速度沿 OA 方向流动，OA 与 OB 的夹角为 $100°$，求轮渡实际航行的速度和方向.

生：如图 4，$V_1=15$ 千米/小时，$V_2=4$ 千米/小时，轮渡实际航行的速度为 V 千米/小时，轮渡的方向为 V 与 V_2 的夹角，这就相当于 $\triangle AOC$ 中，已知 $AC=15$，$OA=4$ 及 $\angle A=80°$，求 OC 及 $\angle AOC$.

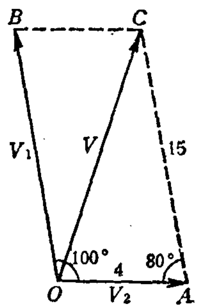


图 4

解：$\triangle AOC$ 中，由余弦定理，得

$$OC^2=OA^2+AC^2-2\cdot OA\cdot AC\cos A$$
$$=4^2+15^2-2\cdot4\cdot15\cdot\cos80°$$
$$\approx220.16,$$

$$\therefore\quad V=OC=\sqrt{220.16}=14.83.$$

再利用正弦定理求 $\angle AOC$.

$$\sin\angle AOC=\frac{AC}{OC}\sin A=\frac{15}{14.83}\times\sin80°=0.9961,$$

查表得 $\angle AOC=84°56'$.

由此可知轮渡实际航行的速度为每小时 14.83 千米，它与水流方向成 $84°56'$ 的角.

四、小　结

师：正弦定理、余弦定理、面积公式是解斜三角形的主要依据，另外在解题时，经常还要联系一些代数知识和几何知识，因此代数、几何、三角是有密切联系的. 例如，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=12$，$A=30°$，$B=120°$，求 $\triangle ABC$ 的面积和外接圆的半径.

这道题的条件是两角一边，可用正弦定理求出 a、c，再用三角形面积公式求面积；也可由条件得 $a=c$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，直接用余弦定理求得 a、c，再用三角形面积公式求面积；还可以在图5中，作 AC 边上的高 AD，解直角三角形 ADB，求出 BD，于是三角形面积很快就可解出了．外接圆的半径可直接用正弦定理求得，即

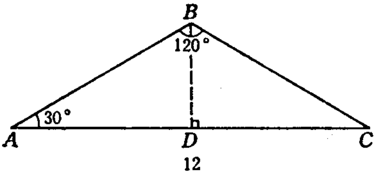


图 5

$$\frac{12}{\sin 120^\circ}=2R,\ R=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

若先求外接圆半径 R，则三角形面积可通过 $S_\triangle=2R^2\sin A\times\sin B\sin C$ 来解决．那么，碰到实际问题到底采用什么方法来解决呢？这必须具体问题具体分析，但关键是同学们必须牢固地掌握一些基础知识和基本技能，这样才能更好地提高解三角形的能力．

五、课 外 作 业

1．在 $\triangle ABC$ 中，若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，$\sin A=2\sin B\cos C$，试证 $\triangle ABC$ 是等边三角形．

2．已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三条边，且关于 x 的方程 $a(1+x^2)-2bx+c(1-x^2)=0$ 无实数根，问 $\triangle ABC$ 是什么三角形？

3．已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=72^\circ$，其三边满足 $(a^2-c^2)^2=b^2(2c^3-b^2)$，求 $\angle B$ 和 $\angle C$．

4．从地面上的 D 点，测得山上旗杆顶 A 的仰角为 45°，旗杆底 B 的仰角为 30°，面向旗杆方向前进10米到达 C 点以后，再测旗杆顶部与底部的视角为 15°，求旗杆的高 AB $\left(\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$．

教 案 说 明

(1) 正弦定理和余弦定理反映了任意三角形中边角之间的关系，是解斜三角形的主要依据．讲解时，不仅要让学生牢记定理的内容，而且还应理解和掌握定理的应用．因此，有必要在这一章讲完之后，上一堂正弦定理和余弦定理的应用课，这对于提高学生逻辑推理能力，增强综合运用知识的能力等，都将起着积极的作用．

(2) 在讲应用时，由于课本上已讲清了定理的来龙去脉及其一般应用，为此必须在学生原有认识的基础上再提高一步，讲点综合应用，做到既复习巩固原有知识，又进一步深化原有知识，培养学生综合运用代数、几何、三角知识的能力，扩大学生的知识面，从而为今后进一步学习打好基础．为了完成本教案的教学目的，必须精选范例和练习．选择标准是：(i) 能深化正弦定理和余弦定理的知识．例如，让学生知道它们的变形：$a=2R\sin A$, $\sin A=\frac{a}{2R}$, $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ 等等，而这些是初中学生不甚熟悉的，有必要在例题的讲解中加以介绍．(ii) 选择适合初中学生能力水平的题目，即既有一定的深度和难度，又是经过他们的努力，能够解决的问题．(iii) 题目要有一定的广度，尽量能联系一些初中教材中的重点知识．例如，代数中的根式运算、乘法公式、因式分解、解方程、二次方程根的判别式、求二次函数的极值等，在几何中能联系一些等量定理、不等量定理及几何作图等，在物理中能联系一些简单的力学问题．

综合题要尽量将代数、几何、三角的知识交织成一片锦绣的园地，使学生能充分认识到代数、几何、三角是相互联系，不可分割的．

以上所述，是本教案在教学过程中，讲解例题和布置课外作业的一些教学指导思想．

(3) 由于本教案的知识面广，综合性强，且有些例题也具有一定的难度，故在实际教学过程中，应多运用启发式，让学生发挥他

们的才智，自己去发现问题，解决问题，教师始终作为引路人，及时给学生扫除一些解题中的障碍. 由于每一个题目都有一定的特点，如何启发，要根据具体的情况，即根据题目内部的结构、特征去决定.

每个例题讲解时，一定要先分析题意，这是启发的开始，经常如此，就能使学生养成良好的解题习惯. 再有，由于本教案课时较紧，在备课时，一定要全面地、细致地考虑到每个教学环节的具体处理方法. 如一些例题可用小黑板事先写好；对于例题，哪部分由教师启发，哪部分由学生单独完成，哪些需教师板书，哪些需学生配合，都必须考虑周到，在四十五分钟内，必须充分提高教学效率. 总之，教学内容与教学方法，这二者是互有联系，互有影响的，要上好一节课，这二者是缺一不可的.

(4) 本教案设计的特点旨在体现出中学数学教学大纲的精神，强调三大能力的培养，即提高学生的计算能力，逻辑推理能力和联系实际的能力. 另外由于本课内容与初中其他数学知识的联系比较密切，问题的综合性也较强，因此本课既是一堂正弦定理和余弦定理的应用课，也是一堂初中数学知识的复习课，学生从中可以深刻地体会到：解三角形的问题与代数、几何之间的联系是相当密切的. 最后，本教案在解题技巧与思想方法的处理上，也有其一定的特色. 如例 4 中的添加辅助线和解方程等技巧，就是一个例子.

初中几何引言课

尹旺忠（湖北省武汉市教研室）

作 者 简 历



尹旺忠　湖北黄冈人，1958年毕业于武汉教育学院数学专修科，1955年任武汉二十九中学数学教师．1987年被评为湖北省中学高级教师．现任武汉市教研室数学教研员，武汉市中学数学教研会常务理事，湖北省中学数学教研会学术委员．

教学目的

(1) 通过一些有趣而又具有实际意义的问题，激发学生学习几何的兴趣．

(2) 使学生初步了解学习几何的意义和几何学的研究对象．

(3) 通过介绍几何学的发展简史及我国古代数学家在几何上的成就，对学生进行辩证唯物主义和爱国主义教育．

教学过程

一、复 习 回 顾

师：同学们，从今天起，我和大家一道来学习数学的另一门分科——几何(板书)．什么是几何呢？有人说："几何是图形的王国．"这句话形象地说明了几何学是一门以图形为其研究对象的学科．这与代数的研究对象显然不同．谈到图形，大家并不陌生，在小学数学中，我们已学过一些图形．现在就请大家一起回忆一下已学过的图形．

(由学生回答或教师自答均可．)

[本课的开场白，简单又明确．既指出了几何学的研究对象，又很自然地引导学生去复习小学中所学过的几何图形．尤其是新课的一开始，就及时地提出了学生最为关心的问题——什么是几何？从而有效地吸引了学生的注意力，激发了学生探究知识的积极性．]

师：上面所说的几何图形，可分为两大类：一类是平面图形，如直线、线段、垂线、平行线、角、三角形、平行四边形、长方形、正方形、梯形、圆等；另一类是立体图形，如长方体、正方体、圆柱、圆锥等．在初中学习几何，将进一步深入系统地研究这些平面图形，及其性质和应用．

二、介绍几何发展简史及我国古代数学家在几何上的成就

师：几何是一门古老的学科．它是在人们的生产和生活等实践活动中形成和发展起来的．

相传在四千多年前，古埃及尼罗河每年泛滥成灾，造成大片良田界限被冲毁．水退后，农民需要重新勘定田界．这样，测量土地的方法也就应运而生了．另外，由于古埃及国王大量地修建金字塔，

相应地丰富了几何的知识及其应用. 后来,希腊与埃及相互通商,埃及的几何知识渐渐传入希腊,使得几何知识及其应用得到了广泛的传播. 最后经古希腊的欧几里得(公元前 330—275 年)归纳、整理编成《几何原本》一书. 自此几何便成为一门独立的学科."几何"是一个翻译名词,由我国明代科学家徐光启首先使用,其原意是"测量土地的技术".从字面上可以看出,它与我们的生活实际有着密切的联系. 我国古代的劳动人民在长期的生产劳动中也积累了大量的几何知识,其成就也是十分突出的. 如流传至今的《周髀算经》、《墨经》、《九章算术》,都记载下了很多关于几何方面的知识. 下面略举一二:

(1) 《周髀算经》中,记述了周公(公元前 1120 年左右)同商高的一段对话,谈到了"勾三股四弦五",这就是有名的"勾股定理"的特殊情况. 勾股定理国外叫毕达哥拉斯(古希腊人)定理.

(2) 战国时代墨子(约公元前 480—390 年)学派所著的《墨经》中,把"圆"解释成"一中同长"与欧氏的提法基本一致,但比欧氏要早 400 多年.

(3).南北朝时期数学家祖冲之,在公元五世纪就已算得圆周率 π 的值在 3.1415926 与 3.1415927 之间,这比其他国家算得同样结果要早一千年左右.

我们的民族是一个伟大的民族,有自己光辉的历史,有杰出的科学成就,我们要奋发学习,为祖国的建设多作贡献.

[简要地介绍几何史和我国古代数学家在几何上的成就,一方面可提高学生学习几何的兴趣,另一方面可对学生进行辩证唯物主义和爱国主义教育.]

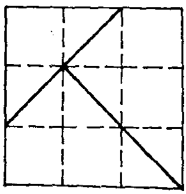
三、创设问题情景,引导学生思考

师:通过上面几何史的介绍,不难看出几何同其他科学一样,产生于社会生活和生产实践的需要,因而几何知识在实际生活中

是非常有用的．几何中所用的逻辑论证的方法对提高人的思维也是大有用处的．

传说古希腊的国王，看了欧几里得所著的《几何原本》一书后，认为太费思考了，提出要欧几里得把书中的证明搞简单些．可是，欧几里得却说："在几何中是没有皇上走的康庄大道的．"说得多么精采啊！学习几何的乐趣，存在于思考之中，越思考越觉得其乐无穷．而这种乐趣，懒汉是无法分享的．同学们，从现在起，你们就应该养成多动脑、勤思考的好习惯，并注意掌握正确的思考方法．

下面请同学们思考几个问题．

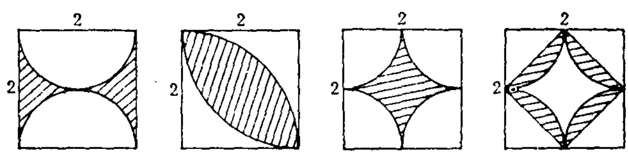


左面的"九宫图"中，横的粗线段与竖的粗线段一样长吗？

生：凭眼睛看，似乎横线段短，实际上它们的长度相等．

师：对！学习几何需要观察，但不能只凭观察作结论．

师：怎样计算下列四个图形中阴影部分的面积：

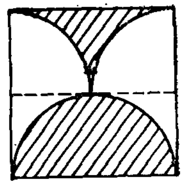


(甲)　(乙)　(丙)　(丁)

生：图(甲)中阴影部分面积为正方形面积减去圆(以2为直径)的面积(即$4-\pi$)；图(乙)中阴影部分面积为半圆(以2为半径)面积减去正方形面积(即$2\pi-4$)；图(丙)中阴影部分面积为正方形面积减去圆(以1为半径)的面积(即$4-\pi$)；图(丁)中阴影部分面积为圆(以2为直径)面积减去四个等积的小三角形的面积(即$\pi-2$)．

师：下图中阴影部分面积与空白部分面积哪个大？

生：一样大！这只要作出如图的虚线就很清楚了.



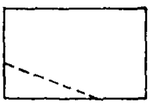
师：一张长方形纸，剪去一个角后，这张纸有几个角？其中有几个直角？怎样剪？

生：分三种情况（即三种不同的剪法）：

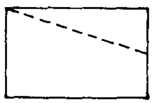
① 如下图（甲），沿虚线剪下，这张纸有五个角，其中有三个直角；

② 如下图（乙），沿虚线剪下，这张纸有四个角，其中有两个直角；

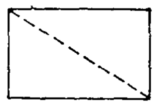
③ 如下图（丙），沿虚线剪下，这张纸有三个角，其中有一个直角.



（甲）



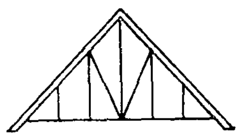
（乙）



（丙）

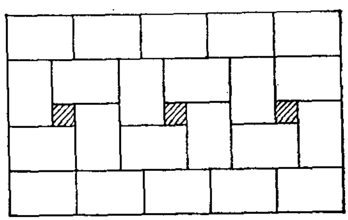
师：房屋的人字梁具有三角形的结构，这样做能使建筑物坚固和稳定. 试观察指出下图屋梁架中有多少个三角形？

生：共有三角形 13 个.



师：用长为 18cm 的木块铺地（如图所示）结果留有三个空隙（图中阴影部分）求它的总面积.

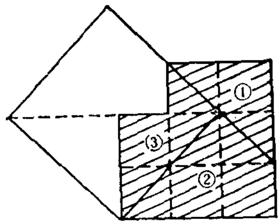
生：① 由图观察知三个木块的宽等于两个木块的长，故木块宽 12cm.



② 三个空隙为大小相同的正方形. 其边长恰好为木块的长与宽之差即 6cm. 故三个空隙的总面积为 $36\times3=108(\mathrm{cm}^2)$.

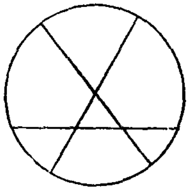
师：下图是缺一个角的废三夹板，现将它锯成三块，以便拼成一个新的正方形，应如何锯法？

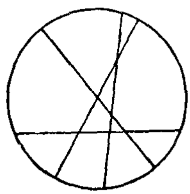
生：锯成如图所示的三块，可拼成一个新的正方形。



师：用刀切一块圆饼，切5刀时最多可切多少块？

生：未切时，本来就有一块；切一刀时，增加一块，共1+1=2块；切2刀时再增加2块，共1+1+2=4块；切3刀时[如图(甲)]又增加3块，共1+1+2+3=7块；切4刀时[如图(乙)]，最多可切1+1+2+3+4=11块；切5刀时，最多可切1+1+2+3+4+5=16块.


(甲)


(乙)

师：好！思考的问题到此为止，同学们通过实验、观察、思考，运用一些简单的几何知识，解决了我所提出的一些问题. 这仅仅是开始，有关几何的问题还很多，解决问题所需的知识和方法也很多，这一切留待以后逐步地学习.

[师生共同思考、解决带有启发性、趣味性、思考性、知识性的

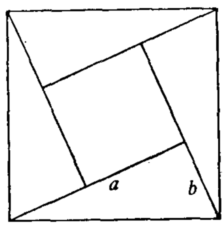
问题，一方面使学生了解学习几何的必要性；另一方面引起了学生思想上的共鸣，调动了他们积极的情感，激发了他们的兴趣，使他们自始至终都能保持高昂的情绪和良好的精神状态．这样做，既符合初中学生的心理特征——好动、好奇、好胜，又为学生跨入平面几何的学习大门培养了良好的心理状态．]

四、总　结

师：这节课，我们对小学所学的几何知识作了粗略的回忆，对几何发展史及我国古代数学家在几何上的成就作了些简要介绍，并要求同学们解答了一些有趣的几何问题，从中我们不难了解到，几何学是一门古老而又十分有趣、有用的学科．下面再出几道题，留给大家课外思考．

1．连结正方形四边的中点组成一个新的正方形，再连结新正方形四边的中点又组成一个正方形，以此类推，若设原正方形的面积为 1，试求出第六次组成的正方形的面积．$\left(\frac{1}{64}\right)$

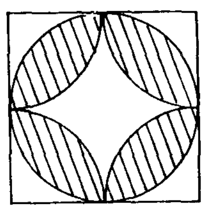
2．右图是我国古代数学家赵爽所用的"勾股方圆图"．如果把它视为四个斜边长为 c，直角边长为 a、b($a>b$)的直角三角形拼在一起，所构成的正方形(中间的四边形也是正方形)，你能用面积的计算来得出 $c^2=a^2+b^2$ 吗？



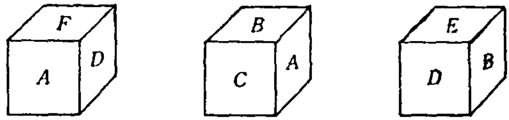
$\left(c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=\cdots\right)$

3．设计如右图所示的花坛，并计划在阴影部分内种花，在其他部分内种草，试问这两部分面积谁大？

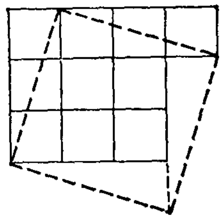
(设正方形的边长为 $2a$，则种花面积为 $2a^2(\pi-2)$，种草面积为 $2a^2(4-\pi)$)



4．正方体各面分别用字母 A、B、C、D、E、F 表示．从不同方向观察可得如下三个图，试问 A、B、C 三面各对哪一面？($A\to E$，$B\to F$，$C\to D$)



5. 试把下图（实线）剪成三块后拼成一个正方形（图中虚线表示剪拼后的正方形）.



教案说明

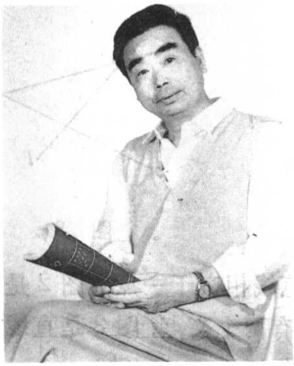
学生在学习几何前，往往因受外界诸因素的影响，在思想上对几何的学习易产生畏惧感，因此有必要在上课时先消除一下学生心理的负担，提高学生学习的兴趣，这对今后的学习来说是至关重要的. 因此在本节"引言课"中，针对初中生的年龄特征，通过形象化的语言和历史的回顾，介绍了几何及其研究对象，以及初中几何学习的主要内容，把辩证唯物主义教育与爱国主义教育贯穿其中；通过一些有趣的图形问题，让学生饶有兴趣地沉浸在知识的探究过程中，从而把教育的知识性、思想性、思考性、趣味性、启发性等有机地结合起来，学生对学习并不感到枯燥，在没有思想负担的情境下，不知不觉地学到了一定的知识. 从教学实践来看，这样进行引言课的教学，学生兴趣较浓，而且整节课中，注意力非常集中，思考问题的积极性也很高，学生普遍反映这样的课爱听.

此外，在实施本课教学时，教学形式和教学手段可视条件而有所改进，如回答问题可采用电视中知识竞赛的形式. 有条件的学校，可利用幻灯等电化教具进行教学，这样做更能提高教学效果.

同位角、内错角、同旁内角

李如锦（四川省垫江中学）

作 者 简 历



李如锦　四川垫江人，1955年毕业于四川省涪陵师范学校，次年任涪陵地专机关干部文化学校数学教师，1961年任涪陵三中数学教师．1987年被评为四川省中学高级教师，1985年获四川省劳动模范称号．现任四川省垫江中学数学教师、数学教研组组长，垫江县中学数学教研会副理事长．

教学目的

使学生明确构成同位角、内错角、同旁内角的条件，了解其命名的含义，并能在变式或在复杂的图形中正确地辨认出这些角，为以后学习平行线的判定和性质作好充分准备．

教学过程

一、引　　入

师：我们已经学习了两条直线相交所成角的内容，今天要学

习两条直线被第三条直线所截所成的角的内容.

[开门见山地引出新课，让学生尽快地接触到本节课最本质、最重要的内容.]

师：先请大家回答一个问题：若两条直线 a 和 b 被第三条直线 l 所截，那么交点最少有几个？最多有几个？同学们可先作图，然后根据图形回答问题.

(让学生互相交流作图情况，然后把大家所作的图抄录在黑板上，可能有下面几种情况.)

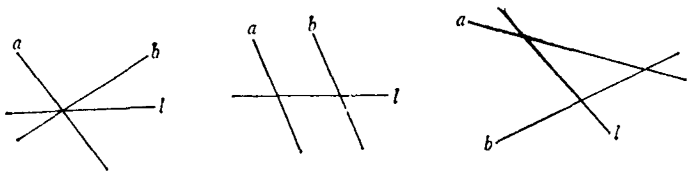


图 1　　图 2　　图 3

师：图 1 是两条直线与第三条直线相交于一点，图 2 是直线 a 和直线 b 平行，直线 a、b 和直线 l 有两个交点，图 3 是直线 a 和 b 与直线 l 有三个交点. 为了研究的方便，我们取图 3 的部分来研究. 同学们看一看两条直线 AB 和 CD 被第三条直线 EF 所截而成的小于平角的角共有几个？

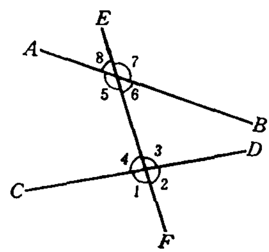


图 4

(教师在黑板上画出图 4.)

生：8 个角.

师：对！因为这 8 个角是由两条直线被第三条直线所截而成的，所以简称这 8 个角为"三线八角".

这 8 个角中，有公共顶点的两个角都是什么角？举例说明.

生：邻补角和对顶角，如 $\angle 1$、$\angle 2$ 为邻补角，$\angle 1$、$\angle 3$ 为对顶角.

师：数一数，对顶角共有几对？邻补角共有几对？

生甲：对顶角共有4对，邻补角共有4对.

生乙：不对，邻补角共有8对.

师：邻补角应有8对：$\angle 1$，$\angle 2$；$\angle 2$，$\angle 3$；$\angle 3$，$\angle 4$；$\angle 4$，$\angle 1$；$\angle 5$，$\angle 6$；$\angle 6$，$\angle 7$；$\angle 7$，$\angle 8$；$\angle 8$，$\angle 5$.

[新课题的引入，可让学生在旧知识的复习过程中，自然地引入新概念.]

二、新　　课

师：这节课，我们要专门研究三对具有特殊位置关系的角，而其中每对角都没有公共顶点．这些角对于今后研究平行线的问题是十分重要的，大家要认真学好它.

[恰当地阐明一下教学目的，让学生明白学习新知识的必要性，可以激发学生的学习动机和兴趣.]

师：这8个角中，我们先看$\angle 1$和$\angle 5$，（手指图4，并把这两个角的两边涂成红色.）这两个角各有一边在同一直线上，这是哪条直线？

生：是截线EF.

师：都在截线EF上的这一边是同向还是反向？

生：同向.

师：再看$\angle 1$和$\angle 5$另一边的位置怎样？

生：另一边在截线EF的同旁，方向同向.

师：总的看来，$\angle 1$和$\angle 5$这对角到底有些什么特点？

生甲：都在截线上的一边是同向的，不在截线上的一边在截线的同旁，是具有相同位置的两个角.

生乙：我认为$\angle 1$和$\angle 5$是具有相同方向的两个角.

[学生在教师的启发引导下，积极地参加到观察对象的关键特征、寻求定义的发生过程的探索活动中去，主动地学习，积极地思

考，变被动接受为主动探索，教师发挥了主导作用，学生提高了对概念的理解水平.]

师：对！那么我们给 ∠1 和 ∠5 这对角起什么名称呢？

生甲：同位角.

生乙：同向角.

(学生争论.)

师：同学们说得都有一定的道理，认为应叫同向角的同学，有自己独立的见解，是从角的边的方向相同的角度上去考虑的. 但是由于我们研究的是两个角的位置关系，所以，还是叫同位角为好.

[学生在探索中，难免有不同的看法，教师要鼓励学生争论，及时作出正确的结论，并鼓励学生服从真理、修正错误.]

师：我们把像 ∠1 和 ∠5 这样一边都在截线上而且同向，另一边在截线同旁的两个角叫做同位角.

[对已探索到的对象的关键特征进行综合分析，用概括性的语言描述出来，使学生的认识从感性阶段上升到理性阶段.]

师：图 4 中的同位角除 ∠1 与 ∠5 外，还有哪几对？

生：还有 ∠2 和 ∠6; ∠3 和 ∠7; ∠4 和 ∠8.

(在图 4 的下方画出下表，每讲一种角后就由师生共同把结论填进表内的空白处.)

师：请同学们看图 5: (1) DE 为截线，∠E 与哪个角是同位角？

(2) ∠B 和 ∠3 是同位角，哪条直线是截线？

(教师边问边在黑板上画出图 5，并指定同学回答.)

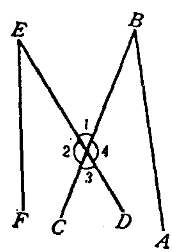
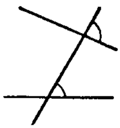
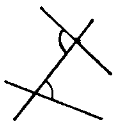
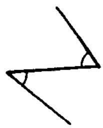
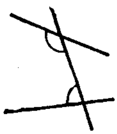
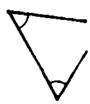


图 5

师：图 5 中，∠B 和 ∠E 是同位角吗？为什么？

生：∠B 和 ∠E 不是同位角. 因为只有三条直线相交才有

角的名称	基本图形	位置特征	都在截线上的一边	不在截线上的一边（在截线的哪一旁）
同位角			同向	同 旁
内错角			反向	不同旁
同旁内角			反向	同 旁

可能构成同位角．而 $\angle B$ 和 $\angle E$ 是四条直线相交所成的角，所以 $\angle B$ 和 $\angle E$ 不是同位角．

［反例往往能加深学生对概念的理解，把握概念的本质特性．］

师：现在大家再来观察图 4 中 $\angle 3$ 的两边和 $\angle 5$ 的两边有什么关系？（用黄色粉笔画出这两个角的两边．）

生：有一边都在截线上，另一边都在截线的两旁．

师：对！都在截线上的边的方向是同向还是反向？

生：反向．

师：这两个角还有什么特点？它们都在两条直线 AB、CD 的哪个位置？

生：$\angle 3$ 和 $\angle 5$ 都在两条直线之间，$\angle 3$ 在 CD 的上方，$\angle 5$ 在 AB 的下方，并且两个角分别在截线 EF 的两旁．

师：对！这两个角的位置是交错的．因此，我们把 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 这对角叫内错角．

（把上述结论和图形填入上表．）

师：大家再看一看，图 4 中还有哪对角是内错角？

（指定同学回答.）

师：图 5 中，$\angle 1$ 与哪个角是内错角？这时哪条直线是截线？

生甲：$\angle 1$ 和 $\angle B$ 是内错角，BC 是截线.

生乙：还有 $\angle 1$ 和 $\angle E$ 是内错角，ED 是截线.

师：对！$\angle B$ 和 $\angle 1$、$\angle E$ 和 $\angle 1$ 都是内错角. 图 5 中，$\angle 2$ 和哪个角是内错角？$\angle 4$ 呢？

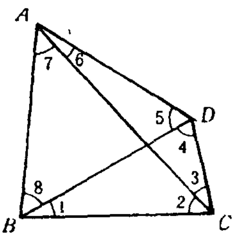


图 6

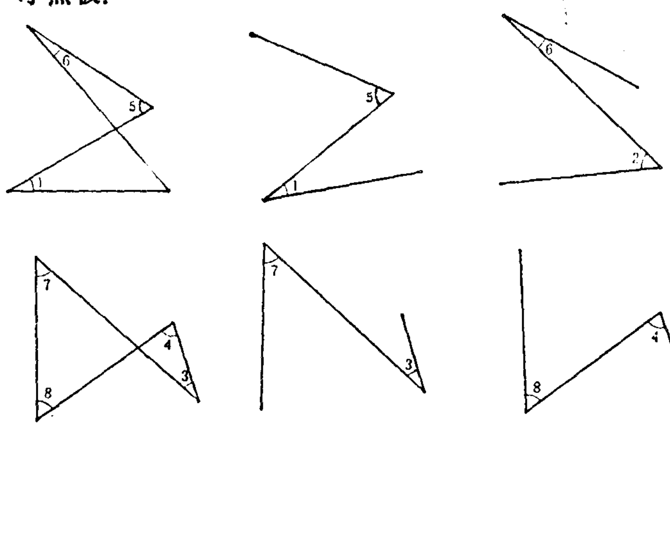
（此问题引起同学们积极思考，热烈讨论.）

师：图 5 中，与 $\angle 2$、$\angle 4$ 成内错角的角不明显. 但仔细观察，可知 FE 的延长线与 DE 所组成的角和 $\angle 2$ 是内错角；AB 的延长线与 BC 所组成的角和 $\angle 4$ 是内错角.

师：请同学们看图 6，图中的内错角有哪几对？

（教师边问边在黑板上画出图 6，并指定一名学生上黑板写出答案，待同学们完成后出示小黑板.）

小黑板：



[在学生学习了内错角概念后，安排适当的练习是必要的.上述问题要求学生把复杂的图形解剖成各种基本的图形，要抓住内错角的基本特征，去找出所有的内错角，从而帮助学生加深对概念的理解.]

师：大家再看看图 4 中的 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 有什么特点？(用蓝色粉笔把这两个角的两边涂成蓝色，仍然从这两个角的两边的位置来研究.)

生：有一边都在截线 EF 上，而且相向，另一边在截线的同旁.

师：对！$\angle 3$ 和 $\angle 6$ 在两条直线 AB 和 CD 之间．那么，$\angle 3$ 和 $\angle 6$ 叫什么名称呢？

生：同旁内角.

师：图 4 中还有哪对角是同旁内角？

生：$\angle 4$ 和 $\angle 5$.

师：图 5 中的同旁内角有哪几对？

生：有 $\angle 2$ 和 $\angle E$，$\angle 4$ 和 $\angle B$.

师：对！请同学们找出图 6 中以 AB 为截线的同旁内角.

生甲：$\angle DAB$ 和 $\angle ABC$.

生乙：还有 $\angle 7$ 和 $\angle 8$.

师：应该是两对．$\angle DAB$ 和 $\angle ABC$ 是 AB 截 AD、BC 而得的同旁内角，$\angle 7$ 和 $\angle 8$ 是 AB 截 AC、BD 而得的同旁内角.

三、小　　结

师：现在大家回想一下，同位角、内错角、同旁内角是怎样形成的？

生：两条直线被第三条直线所截而形成的.

师：辨认这三种角的关键是什么？

生：关键是三条直线相交.

师：现在大家看我的左、右手的大拇指和食指各组成一个角，两食指相对成一条直线(图7)．两个大拇指反方向的时候，这对角是什么角？注意两个角保持在同一个平面内.

生：(齐喊)内错角.

[学生兴趣盎然，纷纷动手学着比试、实验.]

师：大家再来实验一下，大拇指为相同方向的时候，这对角是什么角？

生：(齐喊)同旁内角(学生实验、比试，如图8.)

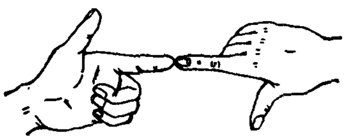


图 7

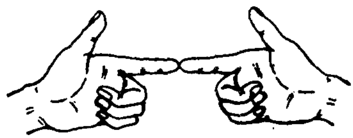


图 8

师：大家想想看，用怎样的手势来表示同位角呢？

(留出时间让学生比试，很快全班同学的手势都比成一样了.)

[上概念课，学生往往死记硬背，枯燥无味，但是像这样采用多种方式调动学生的耳、眼、口、手多种感官共同参与活动，让学生既动手又动脑，实验体会，在活动中加深对概念的理解，学生感到其味无穷，兴趣倍增.]

四、复 习 巩 固

师：若直线 DE、BC 被直线 AB 所截，那么 $\angle 1$ 和 $\angle 2$、$\angle 1$ 和 $\angle 3$、$\angle 1$ 和 $\angle 4$ 是什么角？

(教师在黑板上画出图9，并指定较差同学回答.)

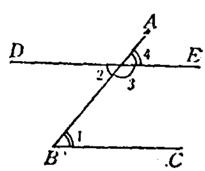


图 9

生：$\angle 1$、$\angle 4$ 是同位角；$\angle 1$、$\angle 2$ 是内错角；$\angle 1$、$\angle 3$ 是同旁内角.

师：如果 $\angle 1=\angle 4$，那么 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 相

等吗？$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 互补吗？为什么？

（学生互相讨论，各抒己见，教师适当引导．）

师：由 $\angle 1=\angle 4$，根据图 9 可得出 $\angle 4$ 还与哪个角有相等关系？为什么？

生：$\angle 2=\angle 4$，对顶角相等．

师：那么 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 之间有什么数量关系？为什么？

生：$\angle 1=\angle 2$，等量代换．

师：同学们是否能用"$\because$"、"$\therefore$"的逻辑推理形式将上面的思考过程表示出来呢？

生：$\because \angle 1=\angle 4$（已知），$\angle 2=\angle 4$（对顶角相等），$\therefore \angle 1=\angle 2$（等量代换）．

师：对！那么 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 互补是什么意思？怎样才能得到这个结论？如果一时还得不出这个结论，是否可以采取间接的办法来得到这一结果？如考虑 $\angle 3$ 还与哪个角互补？这个角与 $\angle 1$ 有什么关系？

生：$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 互补，即 $\angle 1+\angle 3=180°$．由于 $\angle 3$ 和 $\angle 2$、$\angle 4$ 都互补，都是邻补角，即有 $\angle 3+\angle 2=180°$，$\angle 3+\angle 4=180°$．

师：怎样得到 $\angle 1+\angle 3=180°$？

生：由已知得 $\angle 1=\angle 4$，因此若把 $\angle 3+\angle 4=180°$ 中的 $\angle 4$ 换成 $\angle 1$ 就可得到 $\angle 1+\angle 3=180°$．

师：正确．

（指定一名同学将上述推理过程用"$\because$"和"$\therefore$"板演出来．）

[推理论证虽不是本节课的重点，但适当地渗透综合分析的方法还是可取的．]

师：最后请同学们进行课堂练习．

（出示小黑板．）

根据图 10 填空：（只填代号）

(1) $\angle AEG$ 和 $\angle HGE$ 是____；

(2) $\angle HGE$ 和 $\angle EDC$ 是____;

(3) $\angle KAB$ 和 $\angle EDC$ 是____;

(4) $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 是____;

(5) $\angle KAM$ 和 $\angle DAE$ 是____;

(6) $\angle FHC$ 和 $\angle DFI$ 是____.

(A) 对顶角; (B) 同位角; (C) 内错角;

(D) 同旁内角; (E) 以上都不是.

(答案: C、B、E、D、E、D.)

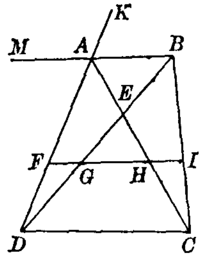


图 10

[进行巩固性的练习, 及时了解学生掌握概念的程度, 这是数学教学的一项重要工作. 通过练习, 目的是为了了解学生对概念的掌握是理解记忆还是机械记忆, 是否掌握了概念的本质属性. 因此, 在编写课堂练习时要尽量避免书本上使用过的现成语言和现成例子.]

五、作　业

略.

教案说明

教案的设计不能脱离教材内容. 本节教材给出了同位角、内错角、同旁内角的概念. 这三个定义都是描述性的发生式定义. 其特点是用比较直观的语言来刻划概念的形成过程和方法, 并且可以用图形直观地把定义表示出来.

但从教材角度上看, 为了节省时间和篇幅, 往往都是直接给出定义的. 从教法角度上看, 由于过分地强调应用, 往往急于求成, 照本宣科地讲解定义, 而对概念的形成过程却一掠而过. 从学生角度上看, 不是通过自己动手、动脑去观察、体验、探索、分析问题, 而是被动接受和死记硬背课本知识. 这样做不利于培养学生的能力.

为此,本课设计的出发点旨在加强定义的发生过程的教学,把单纯地追求让学生再现记忆的教学,改变为建立在让学生积极参与,主动探索基础上的理解记忆的教学上. 它的依据是:

第一,概念的建立必须有个形成过程,在这个过程中去揭示知识的内在联系,强化知识体系,方能形成牢固的知识结构.

第二,加强定义发生过程的教学是符合学生的认识规律的. 学生学习的认识过程和人类获取知识的过程是基本相同的,需要经过从具体到抽象、从感性到理性的循序渐进的过程.

第三,加强定义发生过程的教学就是组织学生探索知识的过程. 著名西方教育家布鲁纳认为:"探索是数学教学的生命线."在探索中,学生是认识活动的主体,有利于教师发挥主导作用.

本课的具体作法是试图将以下四种教学形式有机地结合起来,从而去完成本课的教学任务.

(1) 目的性教学:让学生明白学习本课的必要性,引起学好本课的动机和兴趣,并通过作图体会画三线八角的全过程.

(2) 探索性教学:引导学生去探索,去初步认识三对角的内涵和外延,以及形成这些角的条件和本质特性.

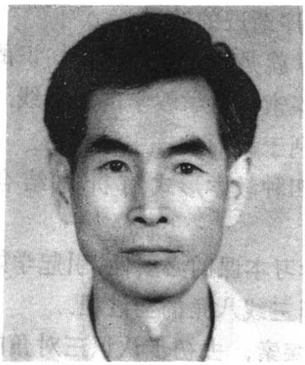
(3) 综合性教学:把探索到的本质特性用概括性的语言去形成定义,从而使感性认识上升到理性认识.

(4) 实践性教学:概念的明确,能力的培养,都要通过学生的感官和思维. 教师要给以学生动手、动脑的机会,在理论指导下实践,通过实践深化知识,以求进一步理解和巩固所学的知识.

三角形三边的关系

王建民（北京市中关村中学）

作者简历



王建民　天津市人，1962年毕业于北京师范学院数学系，同年任北京市中关村中学数学教师．1987年被评为北京市中学高级教师．1979年获北京市海淀区模范教师称号，1987年被评为北京市先进教育工作者．现任北京市海淀区中关村中学数学教师．

教学目的

（1）使学生掌握三角形三边的关系定理，能够利用定理及其推论进行简单的证明．

（2）使学生明确三角形按边分类的原则和结论．

教学过程

一、复习提问

师：什么样的图形叫做三角形？

生：由三条线段首尾顺次连结所组成的图形叫做三角形.

师：是否具有任意长度的三条线段都能“首尾顺次连结”？是否“首尾顺次连结”的三条线段都能组成三角形？(板书课题.)

师：请同学们用你们课前准备好的三根木(或竹)条做成一个三角形，并量出各边的长度，然后把最短的边剪去一小段，观察会出现什么现象，再剪去一小段，观察又会出现什么现象，……

[结合学生熟知的概念，提出问题，启发学生进行思考，并使之在动手、动脑的实践活动中去探索研究对象的变化规律.]

(此时学生情绪激昂，纷纷动手去探索三角形三边的关系，教师可请几位同学报告他们的实验结果.)

师：(1) 你做成的三角形的三边长度各是多少？

(2) 最短边剪去一小段后，是否能“首尾顺次连结”？若能首尾顺次连结，是否组成了三角形？

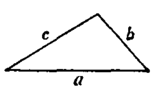
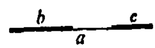
(3) 再剪去一小段，情况如何？再剪去一小段，情况又如何？……

(4) 剪到什么情况时三根木条不能首尾连结成三角形？

生：略.

师：根据大家实验的结果，我们可以将三角形三边的关系总结一下. 请看表格.

(出示小黑板.)

语言描述	三条线段首尾顺次连结组成三角形	三条线段首尾顺次连结，但未能组成三角形	三条线段未能首尾顺次连结
几何图形	 (图 1)	 (图 2)	 (图 3)
数量关系	$b+c>a$	$b+c=a$	$b+c<a$

[采用表格的形式进行总结，是一个好的学习方法，有助于培养学生的能力．以图形为主线，把对于图形的语言描述和图形本身统一起来，把图形的几何特征和数量关系统一起来，是发展能力的基础，是几何教学所不能忽视的．]

师：根据上述结果，对前面提出的问题我们可以给予明确的答复：不是所有的三条线段都能首尾顺次连结成三角形的．

二、引入新课

师：请同学们阅读课本．课本上写道："由三条线段首尾顺次连结所组成的图形叫做三角形．"这句话包含着什么样的图形？

生：包含表格中的图1、图2这样两个图形．

师：用这句话作为三角形的定义确切吗？

[启发思考，使学生思维严密化．]

生：不确切．

师：怎么修改？

生：（回答讨论略．）

（教师对学生的不合理的说法加以指正，对合理的说法予以肯定，最后进行总结归纳．）

师：三角形的定义：由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次连结所组成的图形叫做三角形．

（用语言精确地表述几何概念．）

师：我们知道不是任何三条线段都能首尾顺次连结且组成三角形的，可见三角形的三边之间存在着某种关系，你能发现这个关系吗？

生：两边之和大于第三边．

师：在图2和图3中，也存在着两"边"之和大于第三"边"的事实．可见"两边之和大于第三边"这个性质不是三角形这个图形所独有的．因此这个性质还应该进一步强化．

（由学生讨论，自由发言．并归纳出三角形三边的关系"三角形任何两边的和大于第三边"．）

师：用观察与归纳的方法所得结论并不一定正确，需要进一步用逻辑推理的方法加以论证，正确的才能成为定理．那么怎样来证明呢？

（师生共同完成定理的证明．）

生：已知：如图 4，在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$．

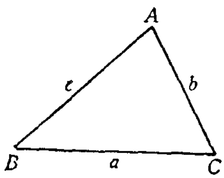


图 4

求证：$b+c>a$，$c+a>b$，$a+b>c$．

证明：BC 是连结 B、C 两点的线段，BAC 是连结 B、C 两点的折线．

因为，在所有连结两点的线中，线段最短，所以，

$$b+c>a.$$

同理可证　　$c+a>b$，$a+b>c$．

师：由这个定理可直接推出如下的定理，称为该定理的推论．

推论　三角形任何两边的差小于第三边．

同学们若对推论进一步思考一番，就不难发现两边的差，有一个谁减谁的问题，显然较长的边减去较短的边才有意义．那么应该怎样去写这个推论的已知与结论呢？

（学生思考、讨论，教师总结、归纳．）

生：已知：如图 5，在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，且$a\geqslant b\geqslant c$．

求证：$a-b<c$，$b-c<a$，$a-c<b$．

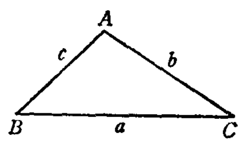


图 5

师：对！请同学们回去证明这个推论，下面我们进一步来讨论三角形边与边之间的关系，从三角形边相等或不等的角度上去考察三角形的边会出现哪几种情况？

生：有以下三种情况：(1)三条边各不相等；(2)有两条边相

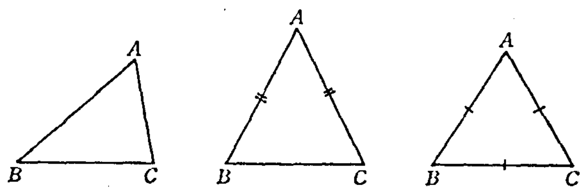
等；(3)三条边都相等.

（学生往往能讲出这三种情况，但不一定能表述得简明而正确，教师要注意适当的引导，并纠正学生叙述中的错误.）

师：（总结）三边两两不等的三角形叫做不等边三角形［图6(1)］.

三边中有两边相等的三角形叫做等腰三角形［图6(2)］，相等的两边都叫做腰，另外一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角.

三边都相等的三角形叫做等边三角形［图6(3)］.



(1)　　(2)　　(3)

图 6

师：三角形按边分类可以分成几类？

生：三类.

师：哪三类？

生：不等边三角形，等腰三角形，等边三角形.

师：等边三角形中有没有两边相等？

生：有.

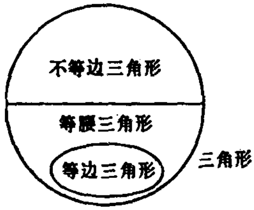
师：能否算做等腰三角形？

生：能.

师：那么等边三角形既可归入第二类等腰三角形，又可归入第三类等边三角形，这种分类是不科学的，应该加以修改.

生：分为两类：

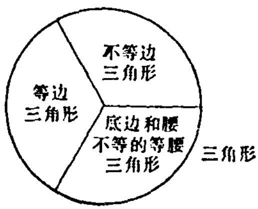
三角形$\begin{cases}\text{不等边三角形;}\\ \text{等腰三角形(含等边三角形).}\end{cases}$



师：如果坚持要分为三类，又该怎么分？

（教师适当地启发：问题的关键在于怎样区别等腰和等边.）

生：三角形$\begin{cases}\text{不等边三角形;}\\ \text{底边和腰不等的等腰三角形;}\\ \text{等边三角形.}\end{cases}$



三、练 习 巩 固

师：下面，请同学们做几道练习.

1．有下列长度的三条线段，能组成三角形的是（　　）.

(A) 1cm, 3cm, 5cm;

(B) 2cm, 4cm, 6cm;

(C) 1cm, 2cm, 3cm;

(D) 2cm, 3cm, 4cm.

2．三角形的三边之长分别为3cm、8cm、$x$cm，且x是整数，那么x应满足的不等式是____________，x可能取的值共有__个.

3. 等腰三角形某两边之长分别为 6 cm 和 8 cm，那么周长等于_____.

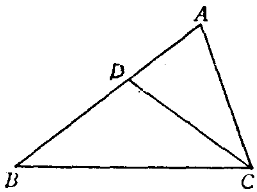


图 7

4. 已知：如图 7，D 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的一点，且 $DB=DC$.

求证：$DB>AC-AD$.

（教师可在学生练习完毕后进行讲评，着重指出解题的关键. 第 1 题，应根据定理的等价命题，检查最大的边是否小于其他两边之和；第 2 题，应把定理和推论综合起来，得到：其他两边之差<三角形的任何一边<其他两边之和. 于是自然有 $5<x<11$；第 3 题应考虑哪一边是腰长；第 4 题，应根据推论得出：在 $\triangle ADC$ 中，$DC>AC-AD$.）

四、小结与布置作业

略.

教案说明

三角形三边关系是很简单的，就几何事实而言也是很直观的，像这样的教学内容，应该怎样处理，才能有利于培养能力，训练思维呢？

首先，应该突出整体性，即深刻揭示概念（三角形的定义）和理论（三边关系定理及推论）之间的逻辑联系，揭示理论和方法之间的内在关系，把概念、理论、方法组织成一个结构明确、逻辑和谐的整体. 一种概念之所以得到发展，其原因在于概念的内涵中蕴含着矛盾，三角形定义中的矛盾表现在不是任何三条线段都能首尾顺次连结而组成三角形的，这就预示着三角形三边间应存在着某种关系，一旦和线段长公理相综合，这个关系就会明显地展现出来. 另外，有了定理和推论，要想把理论转化为解题方法，还要注

意到定理的等价命题及定理和推论的综合应用.

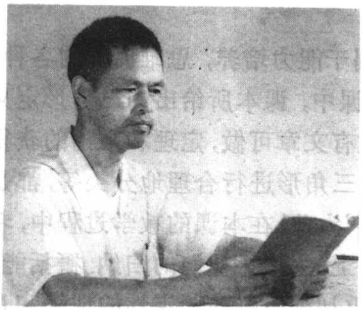
其次，在教学中应揭示解决问题的思维过程.思维过程和思维结果的辩证统一是“教”和“学”的双方都应遵循的基本原则. 数学教学的过程应该是思维过程不断展开的过程，思维过程展开了，就会创造出许多有利于培养能力、训练思维的学习情境. 本课中，我们把思维的起点定在三角形概念上，随着矛盾的揭示，思维的深入，力争达到内化，而这个内化是在整体性、逻辑必然性的基础上完成的.

再次，应挖掘教材中有利于能力培养，思维训练的各种因素，以指导教学方法的设计. 本课中，课本所给出的三角形定义尚不严密，定理中的“任何”两字大有文章可做，定理和推论的获得没有完整的证明格式，以及如何对三角形进行合理地分类等，都是培养能力和训练思维的用武之地. 为此，在本课的教学过程中，考虑到要让学生在动手、动脑的基础上，去锻炼他们的归纳、概括能力，同时提高语言表述能力，并注重加强思维的严密性的训练和几何证明规范化的训练.

三角形内角和定理

陈惠畴（湖南省衡阳市七中）

作者简历



陈惠畴　湖南衡东人，1960 年毕业于湖南师范学院数学系，同年任湖南第三师范学校数学教员．1987 年被评为湖南省中学高级教师．1991 年被评为全国优秀教师．现任衡阳市第七中学数学教师、数学教研组组长．

教学目的

使学生掌握三角形内角和定理，并初步学会利用辅助线证题，同时培养学生观察、猜想和论证能力．

教学过程

一、提出问题

师：（通过实物，边演示，边说明）工人师傅将凹型零件（图 1）加工成斜面 EC 与槽底 CD 成 $55°$ 的燕尾槽（图 2）的程序是：先

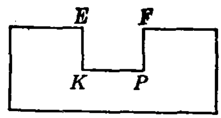


图 1

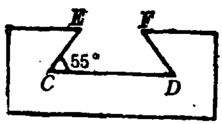


图 2

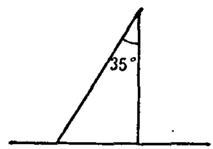


图 3

将垂直的铣刀倾斜偏转 35°(图 3)，然后将刀锋沿内壁 EK、FP 来回切削加工，即得符合要求的燕尾槽.

为什么铣刀偏转 35° 角，就能得到 55° 的燕尾槽底角呢？

[新颖、有趣的实际问题，往往能激起学生的好奇心与求知欲.]

二、实　　验

师：为了回答这个问题，先观察如下的实验：用橡皮筋构成 $\triangle ABC$，其中顶点 B、C 为定点，A 为动点(图 4)，放松橡皮筋后，点 A 自动收缩于 BC 上. 请同学们考察点 A 变动时所形成的一系列的三角形 $\triangle A_1BC$，$\triangle A_2BC$，$\triangle A_3BC$，……其内角会产生怎样的变化？

(启发学生观察，得到下面的结论.)

(1) 三角形各内角的大小在变化过程中是相互联系，相互影响的；

(2) 三角形的最大内角不会等于或大于 180°；

(3) 当点 A 离 BC 越来越近时，$\angle A$ 越来越接近 180°，而其

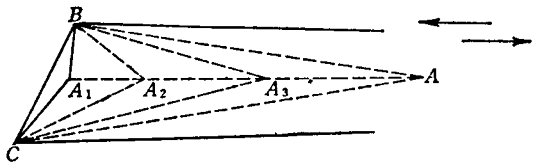


图 4

他两角越来越接近于0°;

(4) 当点 A 远离 BC 时，$\angle A$ 越来越小，逐渐趋近于0°，而 AB 与 AC 逐渐趋向平行，$\angle B$、$\angle C$ 逐渐接近为互补的两同旁内角，即 $\angle B+\angle C\to 180°$.

请同学们猜一猜：三角形内角和可能是多少？

生(众)：180°！

[这个演示是很有趣的．它不仅显示出了三角形内角变化的规律，而且还孕伏了极限思想．]

师：180°，这一猜测是否准确呢？再请同学们观察如下两个实验(图5)：

实验1 先将纸片三角形一角折向其对边，使顶点落在对边

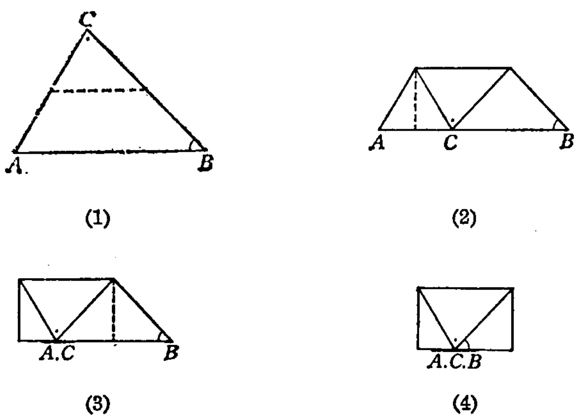


图 5

上，折线与对边平行[图5(1)]；然后把另外两角相向对折，使其顶点与已折角的顶点相嵌合[图5(2)、(3)]；最后得图5(4)所示结果.

实验2 将纸片三角形三顶角剪下，随意将它们拼凑在一起.

师：实验表明：我们猜对了！三角形的内角之和正好为一个平角.

[实验1、2的共同特点是：设法(折叠或剪拼)将三角形的处于不同位置的内角拼凑在一起，使其拼成一个平角. 这样，为后面进行逻辑推理论证，提供了直观的数学模型.]

三、证　明

师：观察与实验所得的结论，并不一定正确、可靠，需要通过数学证明. 那么，怎样证明呢？请同学们继续观察下面的实验(图6)：

将先重叠在小黑板上的两个全等三角形 ABC 的上层的 $\angle B$ 剥下，沿 BC(慢动作地)平移到 $\angle ECD$ 处，用图钉钉住；再剥下上层的 $\angle A$，有意将 $\angle A$ 倒置于 $\angle C$ 与 $\angle ECD$ 之间的空隙 $\angle ACE$ 的上方.

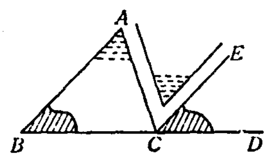


图　6

师：试问 $\angle A$ 与 $\angle ACE$ 是否能吻合？

生(众)：吻合.（有了前面事实作铺垫，答案已十分清楚了.）

师：(追问)为什么相吻合呢？

生：因为同位角 $\angle ECD=\angle B$，所以 $CE \parallel BA$.

师：好！请同学们自己证明“三角形三个内角的和等于180°.”

(教师指定一名学生板演，并要求他画出图形，写出已知和求证.)

生：已知：$\triangle ABC$ (见图7).

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

证明：作 BC 的延长线 CD，过 C 作 $CE\parallel BA$（下略）.

（教师在巡视过程中，发现学生一般都能依据实验的启示，引出平行于 BA 的辅助线 CE，顺利地完成证明．但是学生往往无法简洁、有条理地书写出整个论证过程，教师对此加以指正.）

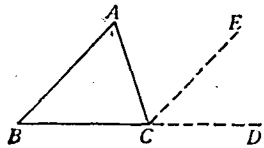


图 7

师：在证明中，我们仅仅添画了一条直线 CE（有意将板演者所画的直线 CE，醒目地用红笔改成虚线），使处于原三角形中不同位置的三个角，巧妙地拼凑到一起来了.

为了证明的需要，在原来的图形上添画的线叫做辅助线．在平面几何里，辅助线通常画成虚线.

[从实验到证明，学生自然地联想到了平行线的有关性质，作出辅助线，整个过程自然，无"神秘"感．如果在讲定理或解题之前，一开始就复习其中要用的定理、法则，虽然省时省事，但有时无形中剥夺了学生学习联想和猜想的机会，不利于思维能力的培养与提高．在同学们完成证明后，可让他们对照课本，把证明严格地叙述一遍，充分发挥教科书的作用，养成学生看书的习惯.]

四、课 堂 练 习

1．口答：已知三角形的两个内角，求第三个内角.

2．口答：求下列图 8 中角 α 的度数.

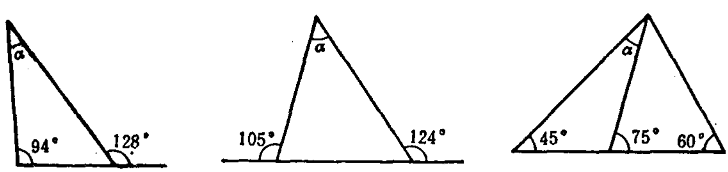


图 8

3. 口答：解释将凹型零件加工成 55° 的燕尾槽的工作原理.

4. “三角形三个内角的和等于 180°”有否其他证法.

（练习第 4 题是为了让学生初步学习添加辅助线而设计的. 学生可能有多种证法，如图 9、图 10、图 11、图 12 所示. 其中图 12 所示证法，是通过三角形的一边上的一点，分别作其他二边的平行线，将原三角形的三个内角集中在一起的，证法虽较复杂，但体现了学生相当可贵的独创精神.）

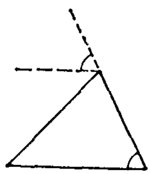


图 9

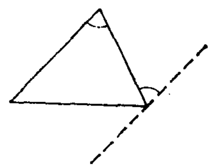


图 10



图 11

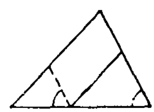


图 12

五、小　　结

师：这堂课，我们学习了一个很有用的三角形内角和定理. 它的证明的基本思想是：运用辅助线，将原三角形中处于不同位置的三个内角集中在一起，拼成一个平角. 辅助线是联系命题的条件与结论的桥梁，今后我们还要学习它.

六、布 置 作 业

阅读课本中有关三角形内角和定理的内容.

课本习题(略).

教案说明

三角形内角和定理，不易直观觉察，测量也往往有误差，必须添置必要的辅助线，方可进行证明. 如果直接复习平行线的有关性质，引出辅助线，给出证明，固然能腾出时间，加强由三角形已知角求未知角的机械性的练习. 但总的说来，降低了学生思维训练上的要求. 本堂课为了避免上述教学上的缺陷，遵循从生动的直观到抽象的思维的认识规律，精心巧设了有关实验，环环紧扣，步步深入，力图最大限度地调动学生学习的积极性；力图把教的过程转化为学生亲自观察、猜测、论证，亲自探索、发现知识的过程. 这样既使学生在获得知识的过程中，得到了锻炼，培养了能力，提高了兴趣，增强了信心，而且也使课堂教学显得分外生动而严谨，有趣而深刻.

三角形全等的判定

丁盛宝（上海市育群中学）

作 者 简 历



丁盛宝　上海市川沙县人，1948年毕业于之江大学外文系，历任哈尔滨七中、哈尔滨商业学校、南洋中学、育群中学数学教师．1980年、1987年先后被评为上海市中学特级教师、高级教师．1960年、1979年两次被评为上海市三八红旗手、上海市教育战线先进工作者、全国三八红旗手，1989年获“全国优秀教师”称号．现任上海市育群中学科研组组长．

教学目的

(1) 让学生自己动手、动脑去探索三角形全等的判定方法，培养学生观察、分析、综合、判断、推理的能力．

(2) 使学生能根据三角形全等的判定方法来判断各种图形是否全等．

(3) 能应用全等三角形的判定公理和定理来论证两个三角形全等，培养正确的论证思想方法，提高分析推理能力．

教学过程

第一课时，判定三角形全等的公理和定理

一、复　　习

师：上节课，我们学习了全等三角形的概念，现在大家回忆一下，怎样的两个三角形是全等三角形？

生：能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形．

（教师然后让学生观察如图1所示的三组纸片，通过移动纸片，启发学生从中发现三组三角形间的形状、面积关系．）

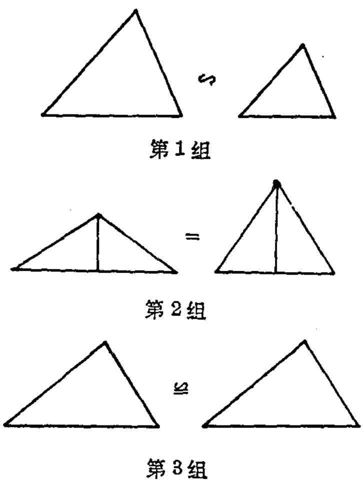


图　1

师：第1组的两个三角形形状相同、面积不等，可用“∽”符号，表示形状相同．

第2组的两个三角形形状不同、面积相等，可用“=”符号，表示面积相等．

第3组的两个三角形形状相同、面积相等，可用“≌”符号，表示形状相同、面积相等．

［一堂好的课，它的开端既是学生进入新知识、新单元学习的起点，又是激发学生学习兴趣和注意的触发点．从复习全等三角形的定义，观察全等三角形的图形特征开始，让学生温故而知新，循序渐进，这是激发学生注意的一种有效措施．注意是心灵的门户，是一切心理活动的开端，也是一切心理活动不可缺少的

“伴侣”，只有高度集中而稳定的注意，才能保证学生学习的顺利进行．学生复习一些学过的基础知识，这样的复习不是简单的重复，而是灵活多样，既复习又提高，使他们产生一种愉快感，产生自信心和对学习内容形成新的注意，这对于提高他们在整堂课上的学习情绪是很有益的.]

二、引入新课

师：现在我想请同学们来考虑一下，如何去判断两个三角形是全等三角形？

（教师在黑板上画出两个三角形，让学生去思考判断全等三角形的办法．学生中有采用移动的（在黑板上，不好移动），有用复印纸复印下来的（如果没带复印纸，就不能复印），有量六个元素的（太复杂了），有画一个三角形和已知三角形全等的（就可将它移动了），等等．）

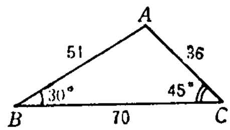
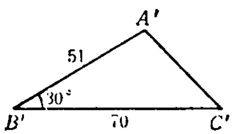


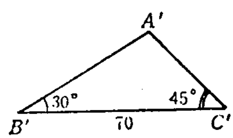
图 2

师：如果我给你们一个$\triangle ABC$（尺寸如图 2，精确到 1 mm），你们能否画出一个$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$全等呢？

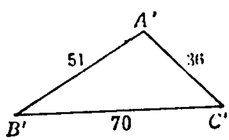
（教师请几个不同画法的同学上黑板板演．学生板演如下：



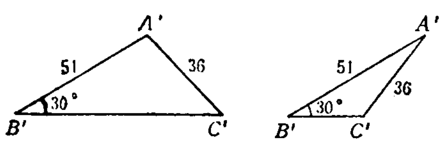
(1) 边角边



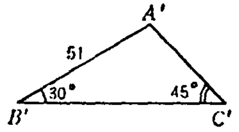
(2) 角边角



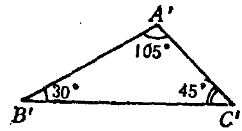
(3) 边边边



(4) 边边角



(5) 角角边



(6) 角角角

板演后，让学生将自己画好的$\triangle A'B'C'$的薄纸撕下，移叠到已知$\triangle ABC$上，观察他们是否能完全重合？从中发现哪几种画法画出的$\triangle A'B'C'$能与$\triangle ABC$完全重合，哪几种画法不能保证完全重合.）

[从两个三角形能够完全重合来判断两个三角形全等以及画一个三角形和已知三角形全等，让学生用已获得的知识去解决新问题. 这样做可以引起学生学习的兴趣，产生好奇心和求知欲，促使他们大胆、多向地展开想象，培养学生的创造性思维. 如有的学生选择两边及其中一边上的高来画三角形；又如利用角角边作三角形时，学生想出移动等多种办法，这些都是我们教师在备课时所没有想到的. 另外，这样引进课题也是符合教育心理学原理的. 从教育心理学上讲，人的分析、综合等思维活动的基础在于人在实际活动中把事物分解和组合，人的思维能力的形成常常是从动作思维到形象思维又到抽象思维，而且即使形成了抽象思维能力之后，也常常是手脑并用，多种思维形式并用的. 根据这个规律，在教学中应该引导学生运用各种器官，在动手探究的基础上，进行多样的实践来获得新的知识，而不是单纯地由老师讲解，学生单纯地听和记来完成教学要求.]

师：黑板上画出的几种三角形，哪几种能和$\triangle ABC$重合？

生：(1)、(2)、(3)能够完全重合；(4)、(6)不一定；(5)可由(2)推出.

师：对！根据(1)、(2)、(3)这些条件画出的三角形是全等的，我们把这个事实作为公理. (5)可由(2)推出，作为定理（证明略）.

同学们现在能否对全等三角形的判定方法加以总结一下呢？

生：由刚才的学习与讨论，可以得出两个三角形全等的判定方法：

(1) 只需要三个元素：边角边公理（SAS）、角边角公理（ASA）、边边边公理（SSS）、角角边定理（AAS）。

(2) 至少有一个元素是边。

三、布置作业

1. 阅读课本中的三角形全等的判定公理和定理。
2. 用文字写出判定公理和定理。

[知识和能力既有区别，又是互相依存的。引导学生主动灵活地探究知识，这本身也是能力的一种培养。这不仅让学生学到了判定三角形全等的公理和定理，同时也接受了探索数学规律能力上的训练。苏联教育家苏霍姆林斯基说："掌握知识牢固的程度还取决于这些知识是从何途径取得的，是在教师举了几个例子以后就要学生背熟的呢？还是学生透彻思考掌握的。"我的体会是，按前一种途径，学生可能会记住它，但不懂得，不会运用，记忆也不可能牢固。如果让学生自己动手探究，从中掌握知识，那就不同了。学生通过自己动手动脑，作图比较，发现并得出公理、定理等，又在运用时反复验证它们，成为一种认识"工具"，而不是一种"包袱"，这正是一般的灌输式的教学方法所不能达到的。]

第二课时，熟悉判定三角形全等公理和定理

一、复习和练习

师：上一节课，同学们获得了判定两个三角形全等的方法，现在请同学们各自整理，用文字把它写下来。

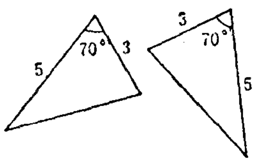
生：……

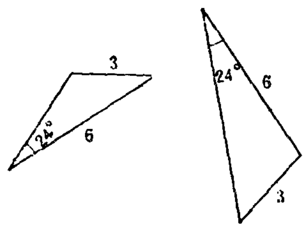
［上节课，我要求学生观察比较图形，得出了三角形全等的判定方法，培养了他们观察和分析问题的能力．现在要求学生在透彻理解的基础上，确切且精练地表达出来，从而帮助他们提高数学表达能力．］

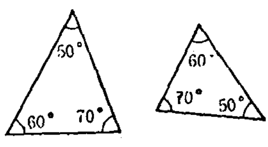
师：下面，我请同学们来做一下练习，进一步巩固我们上一节课所学过的知识．

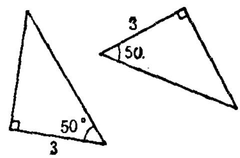
（教师摆出各种从简单到复杂，从具体数字到抽象字母的图形，让学生进行判断．）

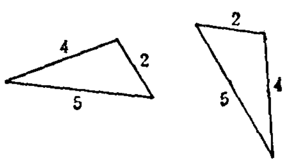
1． 判断下列各对三角形是否全等，为什么？

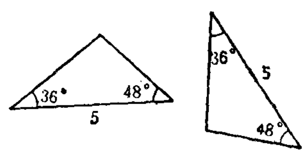
(1)


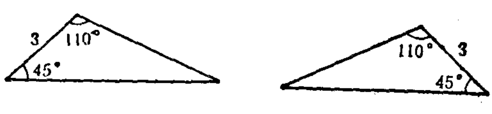
(2)


(3)


(4)


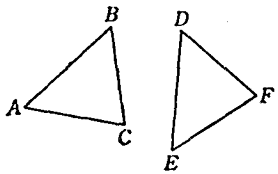
(5)


(6)


(7)


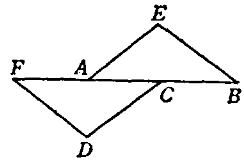
2. 判断下列各对三角形是否全等，并说明理由.

(1)



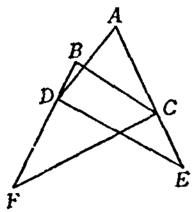
$AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A=\angle D$

(2)



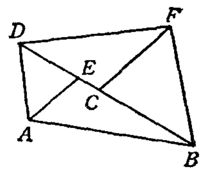
$AB=CF$, $\angle EAB=\angle DCF$,
$AE=CD$

(3)



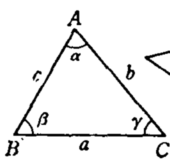
$AD=BC$, $\angle A=\angle BCF$,
$\angle B=\angle ADE$

(4)

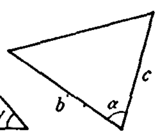


$\angle AED=\angle FCB$, $\angle ADE=\angle FBC$,
$\angle DAE=\angle BFC$

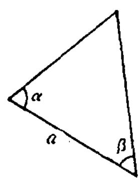
3. 已知 $\triangle ABC$ 的六个元素，下列十一个三角形哪些和 $\triangle ABC$ 是全等形？



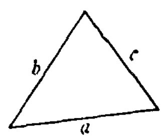
(1)



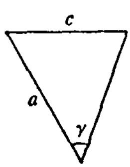
(2)



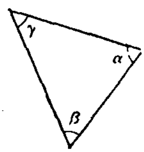
(3)



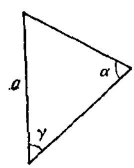
(4)



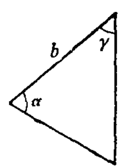
(5)



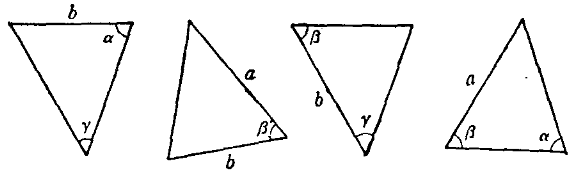
(6)



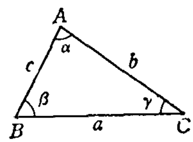
(7)



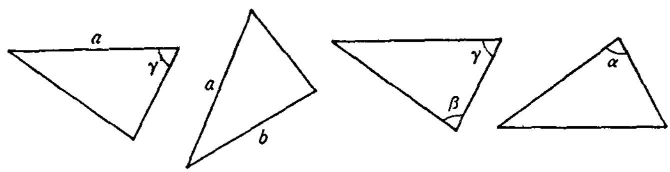
(8)　　(9)　　(10)　　(11)



4. 下列各三角形中需增加哪些条件才能和 $\triangle ABC$ 全等?

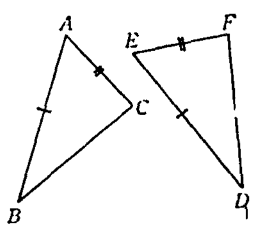


(1)　　(2)　　(3)　　(4)

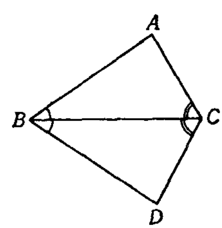


5. 下列各对三角形需增加哪些条件才能全等?

(1)

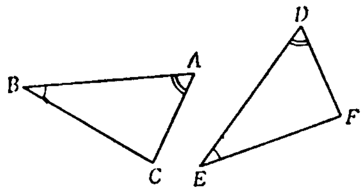


(2)

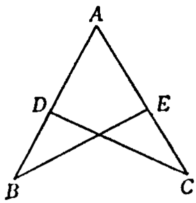


$AB=DE$,
$AC=EF$

$\angle ABC=\angle DBC$,
$\angle ACB=\angle DCB$

(3) 

$\angle B=\angle E,\ \angle A=\angle D$

(4) 

$AB=AC,\ AD=AE$

[在这堂课上，教师要求学生进行判断，实际上是在前面观察、分析、综合的基础上进行的，使知识得到巩固，思维进一步严密，认识进一步深化．这决不是靠死记硬背获得的，而是要提供各种实践机会．在这样的实践中，学生精神饱满，处于积极思维状态．如第4题中需要增加哪些条件才能全等？全班学生都积极开动脑筋，当他想出一种、二种、三种或更多种方法时，感到非常愉快，而不再感到有负担和烦恼了，甚至几个比较差的学生下课后也不想离开教室，还想继续做下去，调动了学生的学习积极性．由此可见，每一点知识的积累，都伴随着反复的实践，这不仅加强了学生能力的培养，同时也提高了学生主动探索的精神．用美国教育家布卢姆的话来说：要让学生“学会学习”，他们在这个过程中，“发展了向自己提供反馈的技能，得知哪些方面已学好了，在学得不太好的方面需要做些什么以便改进”．]

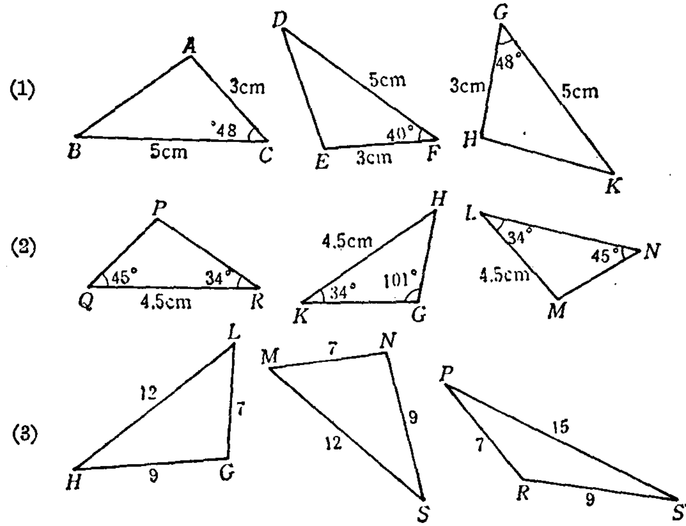
二、小　结

师：通过以上的练习，大家能否总结一下证明两个三角形全等的思路．

生：(1)首先要找出两个三角形；(2)至少应找出一条对应边相等；(3)再找另外两条对应边相等或两个对应角相等或者找另一条对应边相等还得看夹角是否相等而定．不过，事情并不是千遍一律的，还要根据具体情况，灵活运用．

三、作　业

1. 判定下面各组三角形中哪些是全等三角形？请用"≌"符号把它们表达出来，并写出它们的根据是什么？所使用的条件是什么？



2. 已知：在$\triangle ABC$中，AD是BC上的高，AD又平分$\angle BAC$，则$\triangle ADB \cong \triangle ACD$，根据是什么？所使用的条件是什么？

3. 已知：在$\triangle ABC$中，AD是BC上的高，AD又是BC上的中线，则$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，根据是什么？所使用的条件是什么？

教案说明

(1) 本单元共安排三个课时，上面是第一、二课时的授课录，第三课时，主要是举例论证两个三角形全等，培养学生的证题技能和技巧.

(2) 这几节课的特点是把动手探究贯穿于教学的全过程．学

生学到的每一点知识都不是教师灌输给他(她)们的，而是他(她)们自己通过观察、比较、分析、综合、判断得来的. 从复习全等三角形的概念到画三角形，再到三角形全等公理、定理的归纳，整个探索过程都是在学生动手、动脑、开动各种器官积极思维的状态下来解决的. 由于初中学生处在少年时期，心理和生理活动容易兴奋，也容易疲劳，不能长时间专注于一个问题和一种思维活动形式. 所以，我在教学中很注意协调他(她)们的各种器官，看、听、做、写、读交替，又注意把握教学的节奏感，一环扣一环，有张有弛，步步深入，使学生感到新鲜有趣，情绪饱满，从而提高了整个单元的学习效益.

等腰三角形的性质

杨庆余（宁夏银川一中）

作　者　简　历



杨庆余　甘肃甘谷人，1968年毕业于宁夏大学数学系，1970年任西吉县蒙宜中学数学教师．1988年被评为宁夏回族自治区中学高级教师．现任银川一中数学教师，数学教研组长，银川市数学学会副秘书长，宁夏中小学数学教学研究会常务理事．

教学目的

(1) 使学生理解、掌握并会运用等腰三角形的性质．

(2) 培养学生观察、推理以及数形结合的能力．

(3) 培养学生的自学能力．

教学过程

一、课 题 引 入

师：前面，我们学习了有关三角形的知识，三角形中有一类特

殊的三角形叫等腰三角形，什么样的三角形叫等腰三角形呢？（学生可能把等腰三角形的定义回答为“有两腰相等的三角形”.）

师：两边相等的三角形叫等腰三角形．相等的两边才能叫“腰”，一般的三角形不能确定腰．

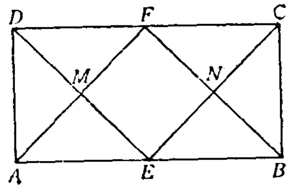


图 1

（出示画好图1的小黑板.）

师：图1中，$ABCD$是长方形，E、F分别是AB、CD的中点，连结AF、BF、CE、DE，交于M、N两点，问图中共有多少个等腰三角形？

（正确的回答是8个．学生可能回答成12个．他们误认为$\triangle ADF$等四个三角形为等腰三角形．教师简要说明，根据题中条件AD不一定等于DF，故不能判定$\triangle ADF$是等腰三角形.）

师：在图1中，如果我们连结EF，连结MN并延长交AD、BC，就会得到更多的等腰三角形及它的组合图形．研究这些图形，要从研究等腰三角形的一些重要性质着手．

等腰三角形的性质是我们今天研究的课题．

（板书课题：等腰三角形的性质.）

二、验 证 归 纳

师：请同学们在课堂练习本上画一个等腰三角形ABC，$AB=AC$，作顶角A的平分线交BC边于D．再观察一下等腰三角形有哪些性质？

（教师拿出事先准备好的八个硬纸板制成的等腰三角形模型作折叠演示，其中顶角是锐角、直角、钝角的等腰三角形各两个，各三角形模型可以沿底边上的高折叠，如图2．再把学生按前后三排一组，分成八个小组，每个小组发给一个硬纸板模型．请同学们拿出有刻度的直尺、三角板、量角器等度量工具作些图形测量、折

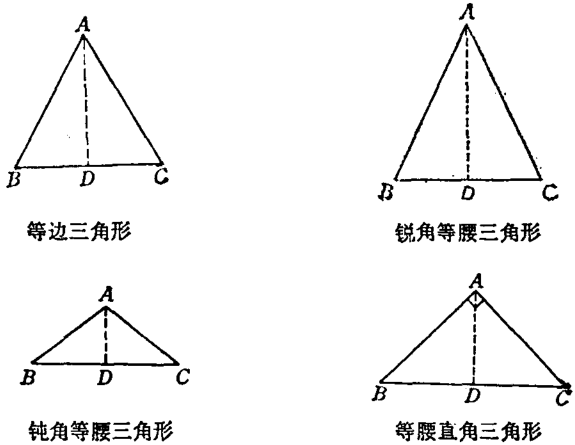


图 2

叠等工作.)

师：请同学们注意讨论以下几个问题：

(1) 两底角 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的关系怎样?

(2) AD 为 $\angle A$ 的角平分线, BD 与 CD 的关系怎样?

(3) 由顶点 A 作 BC 的垂线是否也是 AD?

(4) 作 BC 边的中线是否也是 AD?

(5) 刚才作的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高这三条线是同一条线吗?为什么?

(教师进行巡回指导,并同学生一起研究讨论上述问题. 在讨论过程中, 教师启发同学们应注意观察各种不同位置的等腰三角形,如图 3, 不管等腰三角形的形状大小有何变化,位置怎样安放,它的性质是不变的.)

生甲：(1) $\angle B$ 与 $\angle C$ 相等,折叠图形两底角重合.

生乙：(2) BD 与 CD 相等,折叠图形这两线段重合.

生丙：(3) 在图形的折叠中, 折线为 AD, 用量角器量出 $\angle ADC$ 是直角, AD 即是由顶点 A 作 BC 上的垂线.

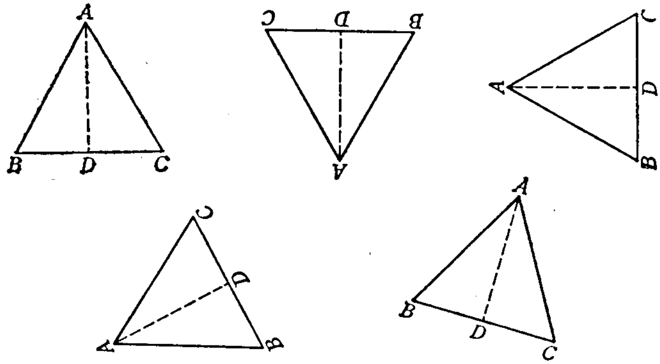


图 3

生丁： (4) 在图形折叠中，折痕为 AD，确实 BD 与 CD 重合，则 AD 为 BC 的中线.

生戊： (5) 顶角平分线、底边上的中线、底边上的高都是折痕 AD，所以这三线是同一条线.

师： 同学们回答得很好，大家从图形的折叠观察中得出了结论. 现在我们来看一下课本上是怎么写的.

(在学生的模型验证、观察分析、阅读理解的基础上，教师进行归纳总结.)

师： 现在我们对等腰三角形的性质进行归纳.（板书.）

(1) 等腰三角形两底角相等；

(2) 等腰三角形顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合(简称"三线合一")；

(3) 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

三、理 论 证 明

师： 上面，我们通过直观模型的演示，归纳总结了等腰三角形的性质，为了进一步加深对这些性质的理解，我们还需要弄清楚它

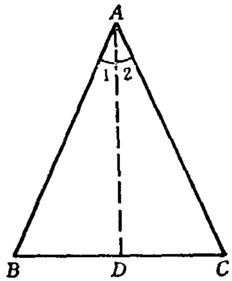


图 4

们的理论根据.

性质1 等腰三角形的两个底角相等（在同一个三角形中,“等边对等角”).（板书.）

这个命题的已知、求证是什么?

生：已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

师：同学们刚才在阅读中已经看了这条性质的证明，它是通过什么途径来论证两个底角相等的?

生：应用全等三角形.

师：怎样寻找全等三角形?

生甲：作顶角 A 的平分线.

生乙：也可作底边上的中线 AD.

生丙：也可以作底边上的高 AD.

师：我们现不妨作底边上的中线 AD，看看怎样完成这个证明.

生丁：作 BC 边上的中线 AD(图4).

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 中，

$$AB=AC \quad (\text{已知}),$$

$$AD=AD \quad (\text{公共边}),$$

$$BD=CD \quad (\text{线段中线的定义}).$$

$$\therefore \quad \triangle ADB\cong\triangle ADC \quad (SSS).$$

$$\therefore \quad \angle B=\angle C \quad (\text{全等三角形的对应角相等}).$$

师：在上述证明中，因为 $\triangle ADB\cong\triangle ADC$，所以我们还可以推出 $\angle 1=\angle 2$，这说明 AD 是顶角 A 的平分线，我们同样可以推出 $\angle ADB=\angle ADC$，因为这两个角的和是 $180°$，所以 $\angle ADB=\angle ADC=90°$，这说明 AD 也是底边 BC 边上的高. 这就从理论上论证了性质2：等腰三角形顶角平分线、底边上的中线、底边上

的高互相重合．三线合一的性质是等腰三角形的最重要的性质．

（板书性质2.）

师：同学们，三角形的内角和是多少度？

生：180°．

师：在等腰三角形中，如果有一个角是60°，不管这个角是顶角还是底角，根据性质1，我们都可以推出另外两个角是多少度？

生：60°．

师：一个三角形的三个角都是60°，这个三角形的三条边会怎样？

生：相等．

师：因此，这个三角形是等边三角形．

（拿出等边三角形模型让同学们再看一下，同时加以简要分析．）

师：这样我们也证明了性质3：有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形

（板书性质3.）

四、巩固应用

师：等腰三角形的性质在证明、计算中都有广泛的应用．下面，我们通过几个具体的例题来研究等腰三角形性质的应用．

［例1］ 求证：等腰三角形两个底角的平分线相等．

请同学们说出已知、求证．

生：已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD和CE分别是$\angle B$和$\angle C$的平分线（图5）．求证：$BD=CE$．

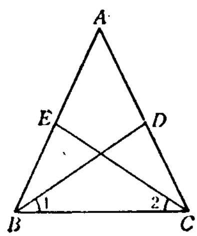


图 5

师：要证明不在同一个三角形中的两条线段相等，可以利用全等三角形．因此，关键是要分别找出含有BD、CE的两个

三角形，再来论证这两个三角形全等．现在，我们来看，BD 既是 $\triangle CBD$ 的边，也是 $\triangle ABD$ 的一条边，而 CE 既是 $\triangle BCE$ 的边，也是 $\triangle ACE$ 的一条边．在这四个三角形中，哪两个三角形可能全等呢？我们来考虑 $\triangle CBD$ 与 $\triangle BCE$ 的关系：在这两个三角形中，BC 是公共边，$\angle CBE=\angle BCD$，还能不能找到一个角相等呢？可以，因为还有一个已知条件没有用．BD、CE 是两底角的角平分线，所以 $\angle CBD$ 与 $\angle BCE$ 相等，由两角夹边对应相等的两个三角形全等，可以判定 $\triangle BDC\cong\triangle CEB$，至此，我们可以得出 $BD=CE$ 的结论．请同学们把证明过程书写出来．

（请一名学生板演，其他学生写在练习本上，教师对证明中的问题进行纠正．）

师：请问：本题通过证明 $\triangle ADB\cong\triangle AEC$ 能不能推出 $BD=CE$？等腰三角形两腰上的中线是否相等？两腰上的高是否相等？为什么？

（学生回答是肯定的．）

这些问题请同学们课后去证明．

师：我们再来看一个例题．

[例 2]　如图 6，点 D、E 在 BC 上，$AB=AC$，$AD=AE$，求证：$BD=CE$．

师：要证明 $BD=CE$，可以像例 1 那样，寻找全等三角形．但能不能不通过全等三角形呢？我们前面讲过等腰三角形有三条性质，第二条性质是什么？

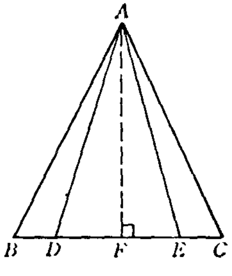


图 6

生：三线合一．

师：这道题中，$\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 都是等腰三角形，怎样使用“三线合一”的性质呢？

生：作一条辅助线．

师：对！作一条辅助线．由 A 引 $AF\perp BC$，F 是垂足．

（教师用彩色粉笔画出 AF，学生自己完成证明过程，教师进行巡回指导．做完后，请学生对照书上例 2 的逻辑推理过程进行检查，把做错的地方纠正过来，把不完善的地方加以补充．）

师：解这道题作辅助线是很重要的．引入适当的辅助线可以化繁为简、化难为易．本题如果不引辅助线，就要证明 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ 或者证明 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$，但推理步骤就要复杂一些．

例 2 的几种证法如下：

证法一：（同课本证法．）

作 $AF\perp BC$，垂足是 F．

$$\because\quad AB=AC,\ AD=AE\ （已知），$$

且

$$AF\perp BC,$$

$$\therefore\quad BF=CF,\ DF=EF$$

（等腰三角形"三线合一"性质）．

$$\because\quad BD=BF-DF,\ CE=CF-EF,$$

$$\therefore\quad BD=CE\ （等量减等量差相等）．$$

证法二：如图 7 所示，

$$AB=AC\ （已知），$$

$$\therefore\quad \angle B=\angle C\ （两底角相等）．$$

又

$$\because\quad AD=AE\ （已知），$$

$$\therefore\quad \angle ADE=\angle AED\ （底角相等）．$$

又 $\because\quad \angle ADE=\angle 1+\angle B,$

$$\angle AED=\angle 2+\angle C$$

（三角形内角和定理的推论 1），

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$$

（等量减等量差相等）．

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中，

$$AB=AC\ （已知），$$

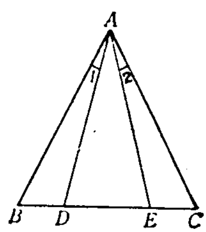


图 7

$$\angle 1=\angle 2 \text{（已证）},$$

$$AD=AE \text{（已知）},$$

$$\therefore\ \triangle ABD \cong \triangle ACE\ (S\ A\ S).$$

$$\therefore\ BD=CE.$$

证法三：证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$（略）.

（以上所提供的各种证法可作为备用材料，写在教案里，以应答学生可能提出的问题.）

师：我们再来看一个例题.

[例 3]　已知：如图 8，P、Q 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点，并且 $PB=PQ=QC=AP=AQ$. 求 $\angle BAC$ 的大小.

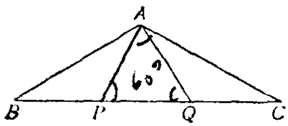


图　8

师：由已知显然可知三角形 APQ 是等边三角形，每个角都是 $60°$. 又知 $\triangle APB$ 与 $\triangle AQC$ 都是等腰三角形，两底角相等，由三角形外角性质即可推得 $\angle PAB=30°$. 下面我们共同来计算.

（请一名学生口述，老师板书，并注意其他同学的反应.）

解：$\because\ AP=AQ=PQ$（已知），

$\therefore\ \triangle APQ$ 是等边三角形（定义）.

$\therefore\ \angle PAQ=\angle APQ=\angle AQP=60°.$

又　$\because\ AP=PB$（已知），

$\therefore\ \angle PAB=\angle PBA$（等边对等角）.

又　$\because\ \angle APQ=\angle PBA+\angle PAB$

（三角形内角和定理的推论 1），

$\therefore\ \angle PAB=30°.$

同理　$\angle QAC=30°.$

$$\therefore \quad \angle BAC = \angle PAB + \angle PAQ + \angle QAC$$
$$= 30° + 60° + 30°$$
$$= 120° \text{（全量等于分量之和）}.$$

五、小　结

师：本节课通过模型演示与理论推证，学习了等腰三角形的三条性质．同学们回顾一下是哪几条性质．

生：(1)等腰三角形两底角相等；(2)等腰三角形“三线合一”；(3)有一个角是 60° 的三角形是等边三角形．

师：我们对这三条性质进行了具体应用，同学们回顾一下三个例题的论证、计算过程，是怎样运用这三条性质的．

生：例 1 用了性质 1，例 2 用了性质 2，例 3 用了性质 3．

师：要特别重视“三线合一”这条性质．在今后的学习中，这条性质将有广泛的应用．

六、布 置 作 业

1．对照等腰三角形的性质，写出等边三角形的性质．

2．课本习题：略．

教案说明

(1) 等腰三角形的性质，这一内容一般要用 3 课时完成．这个教案是第一课时的教案，第二课时将给出一组巩固等腰三角形性质的练习题，同时讲解课本上的例 3，第三课时是技能训练的习题课．

(2) 等腰三角形的定义与等腰三角形的性质的教学间隔时间较长，因此本节课有必要先简要复习一下，然后给出一个判断有多少个等腰三角形的几何图形，目的是激发学生探求等腰三角形性

质的兴趣．这样引入课题，较之按照教材原有程序引入要生动活泼些，可以使学生的思维自然而然地进入到教学设计的轨道上来．

(3) 本节教材的重点是掌握并运用等腰三角形的性质．为了使重点突出，条理清楚，我采用了性质1、性质2、性质3的提法，而没有使用教材中的“性质及推论”这种提法．从课题引入、设置问题、模型演示、自学阅读、探究讨论、例题讲解、课后小结直至布置作业，调动了一切教学手段，着眼于让学生理解、掌握教材重点．

本节教材的难点是证明等腰三角形两底角的平分线相等，即例1．这个难点是知识的复杂性与论证的技能性造成的．本题的困难在于寻找全等三角形(本题有多种证法)，因为 $\angle 1$ 是 $\angle B$ 的部分角，$\angle 2$ 是 $\angle C$ 的部分角，而 $\angle B=\angle C$，$\angle 1=\angle 2$，这就会给一部分学生观察分析图形时带来困难．教师在讲解这个例题时，应揭示已知与求证之间内在的因果关系，注重推理分析，从而达到突破难点的目标．

(4) 等腰三角形的性质，从知识结构上来讲是比较简单的．但是，简单并不等于容易，简单并不等于不重要．等腰三角形“三线合一”的性质等，是重要的基本概念，一定要让学生在第一次学习时，就留下正确、深刻的印象．因此，需要改革传统的教学方法，强化教学手段．

从教学方法上来讲，应考虑两个方面：一方面是教师怎样教；另一方面是学生怎样学．备课时，既要备教法，也要备学法．在数学教学中，多年来有过分强调教师怎样“教懂”而忽视学生如何“学会”的倾向．本节课在教学方法的设计上，把重点放在了学生如何学这一方面．

在具体的做法上，我认为应该通过直观演示得到感性认识，要求学生在学习中运用发现法，开拓自己的创造性思维．基于教材本身的要求，在设计教学过程中，实施了由验证归纳到推理论证，由

个别的形象过渡到一般的抽象，由感性认识上升到理性认识这样一个直观性教学原则.

数学的抽象结论，应以观察、实验为前提．几何教学应该把实验方法与逻辑分析结合起来．在教师的导引下，一边进行叠加重合的模型演示，一边进行阅读讨论，通过看、想、议、练等活动，自己“发现”几何图形的性质，而不是教师灌输几何图形的性质．这样做有利于活跃学生的思维，帮助他们探本求源，由形象的直观实验推理，过渡到抽象的逻辑演绎推理，逐步地获得等腰三角形的性质，真正实现教师为主导，学生为主体的教学宗旨.

(5) 等腰三角形性质应用中的三个例题，采用了三种不同的讲授方法.

例 1 是教材的难点，采用了加强分析、启发思维、严密推理的方法进行细讲．例 2 采取了“点到为止”的方法进行粗讲．例 2 有多种证法，教师“点拨”的目的是引导学生运用“三线合一”的性质 2 去解决问题，可以先让学生自己做，然后对照书本阅读检查，进行自我反馈，从而了解自己掌握知识的情况.

例 3 是课本中复习参考题的习题．采用师生共同解答的讲授方式．讲这个例题的目的是想在突出培养逻辑推理能力的同时，加强运算能力的训练．同时也考虑到习题中有三个计算角度的题目，配备一个同等类型的例题，在教学上对中下学生来说是必要的.

(6) 本教案的不足之处是容量大、层次多、密度强，在量上都显得有些“过”，因此，可根据学生具体情况，作些适当删减，以利于因材施教.

轴对称性质的应用

杨绍绪（江西省赣州地区教研室）

作 者 简 历



杨绍绪　上海松江县人，1962年毕业于江西师范学院数学系，同年任江西赣州第一中学数学教师．1987年被评为江西省中学高级教师．1991年被评为江西省特级教师．现任赣州地区教研室主任，江西省中学数学教研会常务理事，赣州地区数学学会副理事长．

教学目的

(1) 加深学生对轴对称性质的理解，使他们学会利用这些性质去解决有关问题．

(2) 通过对范例的分析、讲解，培养和训练学生解决问题的正确思想方法，达到启迪智慧，提高能力的目的．

教学过程

一、复 习 提 问

师：轴对称图形具有什么性质？

生：轴对称图形具有两条性质：

(1) 图形上对应点的连线被轴垂直平分；

(2) 在轴对称下，对应线段或对应直线若相交，其交点必在对称轴上.

师：性质1的逆定理是什么？

生：性质1的逆定理是：如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称.

师：上节课，我们作一个图形的轴对称图形，正是依据了这一逆定理.

二、讲 解 新 课

师：今天，我们要应用上述性质来解决一个实际问题.

[例 1] 如图1，在铁路 a 的同侧有两个工厂 A、B，要在路边建一个货场 C，使 A、B 两厂到货场 C 的距离的和最小. 问点 C 的位置如何选择？

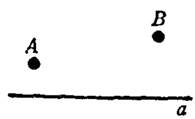


图 1

师：同学们若仔细考虑一下，不难发现，例1实质上是一个求最短路线的实际问题，如果用数学语言叙述就是：已知直线 a 的同侧有 A、B 两点，现欲在 a 上作出一点 C，使 $AC+CB$ 为最小.

(让学生准备白纸一张，在教师的启发下作出点 C.)

师：对同学们来说，这是一个陌生的问题，可能会感到无从下手. 现在，我们不妨这样来思考：

(教师取出在透明纸上事先画好的图2挂在黑板上.)

师：若 A、B 是直线 a 两侧的已知点，现要在 a 上作出一点

C，使 $AC+CB$ 为最小，怎么办呢？请同学们在白纸上作出点 C.

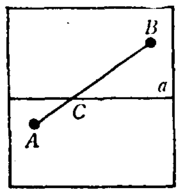


图 2

生：这个问题容易解决，连结 AB，设其交直线 a 于点 C，则点 C 即为所求.

[当一个问题比较困难，不好解决时，我们往往采取"退一步"的方法，如寻求问题在简单情况下的解，或问题在特殊条件下的解等等，以便帮助我们找到原问题的解法．这种"以退为进"的思想方法是数学中常用的方法，应有意识地教给学生.]

师：若将纸片的下半部分沿直线 a 向上旋转一个角度，此时 A、B 两点不在同一个平面上了，如图 3 所示．试在直线 a 上求一点 C，使 $AC+CB$ 为最小．譬如大家可设想有一小虫，在纸面上要从 A 点爬到 B 点，问它沿怎样路线爬才最近？

生：将纸片的下半面绕直线 a 旋转回图 2 的情况（即将原纸片展平），在展平后的纸面上连结 AB，设其交 a 于点 C，则点 C 即为所求.

[将特殊情况推广到一般情况，也是数学中常用的思考问题的方法，让学生从初中起就受到这一训练，对提高他们的能力是大有好处的.]

师：若将图 3 中直线 a 下方的半个纸面继续沿直线 a 旋转，直至与上半面叠合（教师边讲边演示），这时 A、B 即处于直线 a 的同侧了（图 4）.

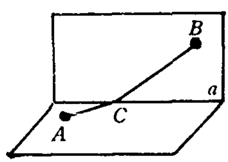


图 3

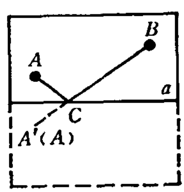


图 4

大家很容易看出图4实际上是图3的另一种特殊情况. 显然，其解可用一般方法来求得. 即：将含有点 A 的半个面，沿直线 a 旋转，使其变为图2的情形，再求解. 用数学语言可描述如下：作点 A 关于直线 a 的对称点 A'，连结 $A'B$，设其交直线 a 于点 C，则 C 点即为所求的点.

（教师引导学生将手中的白纸沿 a 对折，然后再展开，去理解为什么要作点 A 关于直线 a 的对称点 A'.）

师：请同学们作出点 C 并具体地写出作法.

（学生作图略.）

师：由轴对称的性质1可以知道，对称轴是对应点连线的垂直平分线，即相互对称的点到轴上任一点的距离相等. 因而，当考虑某一点和轴上的点之间的距离时，这个点可以用它的对称点来"代换". 如本例，当用点 A 来考虑问题感到困难时，便可用点 A 的轴对称点 A' 来"代换". 由于"代换"后，点 A' 和点 A 到轴上任一点的距离都相等，故 $AC=A'C$，因而原问题中对 $AC+CB$ 最小的要求，可变换成对 $A'C+CB$ 最小的要求. 由于 A' 和 B 此时已处于 a 的两侧，因而变换后的新问题成了一个显而易见的问题，这就最终达到了我们解决原问题的目的.

下面，大家利用轴对称的这条性质来证明我们作出的点 C 确是符合要求的.

（学生证明略.）

［例2］ 如图5，AD 是等腰三角形 ABC 的顶角 A 的外角平分线，E 是 AD 上异于 A 的任意点，求证：$BE+EC>AB+AC$.

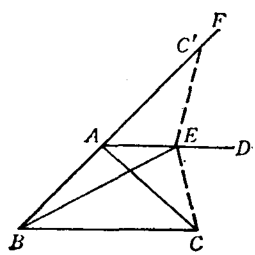


图 5

师：由于 AD 是 $\angle A$ 的外角平分线，所以 AC 和 AF 是关于 AD 对称的对应直线，因而点 C 的对称点 C' 必在 AF 上. 经过轴对称变换

后，$C\leftrightarrow C'$，$EC\leftrightarrow EC'$，$AC\leftrightarrow AC'$. 所以根据性质 1，得$EC=EC'$，$AC=AC'$. 故原问题就变为求证 $BE+EC'>AB+AC'$ 了，从图上可以看出，这个结论的正确性是显而易见的.

（具体证明略.）

[这一例子的目的是为了进一步加深学生对性质 1 的理解，并提高学生对性质 1 的运用能力.]

[例 3] 如图 6，在 $\angle AOB$ 的 OA 边上取两点 P 和 S，再在 OB 边上取两点 Q 和 T，使 $OQ=OP$，$OT=OS$，PT 和 QS 相交于点 X，求证：OX 平分 $\angle AOB$.

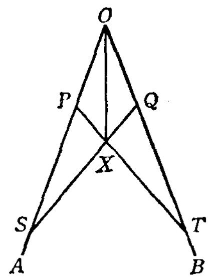


图 6

师：这道例题是同学们已经做过的一道练习题，过去我们用全等三角形的性质证明过，证明过程需要几经周折，若能用轴对称性质来证明，则要简明多了. 怎样证呢？请大家先思考些问题.

这个图形是否是轴对称图形？它的对称轴是哪条直线？哪些点和线是相互对应的？

生：（回答略.）

师：由于 $\angle AOB$ 关于它的角平分线成轴对称图形，又 $OP=OQ$，$OS=OT$，所以

$$P\leftrightarrow Q,\ S\leftrightarrow T,$$

因而连结对应点的线段 PT 和 QS 也相互对应，

$$PT\leftrightarrow QS.$$

根据轴对称性质 2，对应线段的交点 X 必在对称轴上（即 $\angle AOB$ 的平分线上），所以 OX 平分 $\angle AOB$.

三、小　　结

这节课，我们重点讲解了轴对称性质的应用. 轴对称的两条

性质是利用轴对称解决问题的基础，应深刻理解和掌握．将一个图形变为它的对称图形，我们称为“对称变换”，利用这种“变换”，我们常常可以将原问题变得更加简单和直观．关于这方面的知识，我们在今后的学习中还会碰到．

四、作　业

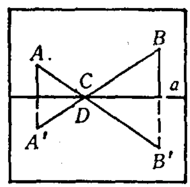
1．讨论题：如图，若在本节所讲的例1中，将作法改为：

(1) 作点 B 关于直线 a 的对称点 B'；

(2) 连结 AB' 交 a 于点 D．

试问这样作出的点 D 和原作法中的点 C 是否重合？为什么？

（这道题是为了让学生学习如何应用轴对称的性质2去解决有关的几何问题，以免学生忽视对性质2的应用．）



（第1题）

2．阅读课本并做课本习题（略）．

3．思考题：在 $\angle XOY$ 内有一点 P．试在角的两边 OX、OY 上分别找出点 Q、R，使 $\triangle PQR$ 的周长 $PQ+QR+PR$ 最小．

教案说明

(1) 这节课所讲的例1，是轴对称的一个典型应用问题，它的解答方法对初二学生来说是陌生的，不少学生学完后，对这种解法总是感到迷惑，“怎么会想到要作点 A 的轴对称点 A'？”为了解决这一问题，在设计本教案时，并不注重例题解答的本身，而是将重点放在试图启发学生在思考中自己找出解题方法．这样做，突出了解题背景，使学生对这一问题有较全面的认识，以便深刻理解这一解法的实质．同时，在解题中，学生还会受到正确认识问题和思考问题方法上的训练，这对培养学生的能力是有利的．

(2) 在本课的讲解中，应注意加深学生对轴对称性质的理解．

对接受能力较强的同学来说，可引导他们从轴对称变换这种较高的观点上来理解本节课所讲的内容. 虽然,在目前初中的教学中,对此还不作要求,但对有条件的学校和班级来说,适当补充有关轴对称应用的例题,对提高学生的能力是大有好处的. 本节教案中的例 2,就是一个这样的例子. 另外,作业中的思考题 3,也可作为一个例子.

基本作图

杨耀南（海南省农垦总局教研室）

作者简历



杨耀南 江苏宜兴人，1966年毕业于徐州师范学院数学系，1968年起任海南农垦昆仑农场中学数学教师. 1986年被评为广东省中学高级教师. 现任海南省农垦总局教研室理科组组长，海南省数学会副秘书长，海南省农垦中学数学教研会理事长.

教学目的

(1) 使学生学会用尺规作出角、角平分线以及平行线这三种基本图形.

(2) 了解简单的几何作图的一般步骤，会用基本作图进行其他的几何作图.

(3) 培养学生的数学语言表达能力与基本的尺规作图能力.

教学过程

一、复习知识，引入新课

1．尺规作图的意义

师：什么是尺规作图？

生：尺规作图就是使用没有刻度的直尺和圆规，根据所给条件，求作几何图形．

师：若已知三边，如何作出一个三角形？

（教师在黑板上画出如图 1(1)的三条线段 a、b、c，然后请一名学生上黑板作图，布置其他学生在下面做．学生完成作图后，请他口述作图过程．）

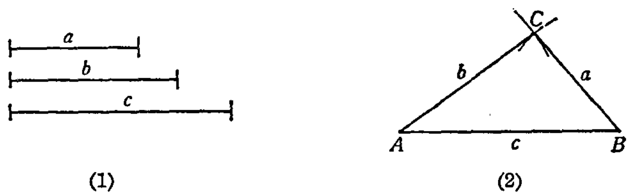


图 1

生：作一条直线，在直线上截取线段 $AB=c$．分别以 A、B 为圆心，以线段 b、a 为半径作弧，两弧相交于点 C，连结 AC、BC，则 $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形．

（教师根据学生作图的情况予以讲评，提醒学生注意作图工具的正确使用和作图语言的准确表达．）

2．基本作图的概念

师：用尺规作角，作分角线，作直线的垂线，作线段的垂直平分线等都是最简单、最常用的尺规作图，我们把这些作图称为基本作图．其他较复杂的几何作图，可由这些基本作图合成．因此，学会了基本作图，其他几何作图就有了基础．

学习基本作图要注意以下几点：

(1) 要学会正确使用作图工具（这里主要是指直尺、圆规），作

出合乎要求的几何图形;

(2) 要学会用几何作图语言来准确表达作图问题;

(3) 要求勤动手画,多动口说.

例如:按下面的语句作图,想一想区别在哪里?

(1) 过点 A 作直线 AB [图 2(1)]; 过点 A 作射线 AB [图 2(2)].

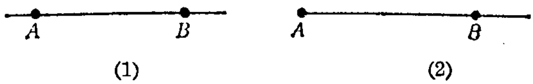


图 2

(2) 过点 A、B 作直线 AB[图 3(1)];过点 A、B 作线段 AB [图 3(2)].



图 3

(3) 以点 O 为圆心, 任意长为半径作圆[图 4(1)]; 以点 O 为圆心,l 长为半径作圆[图 4(2)].

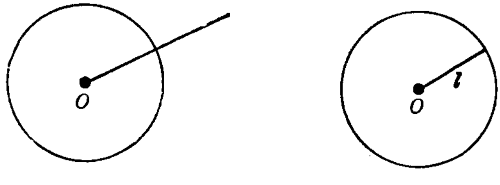


图 4

(4) 以 O 为圆心,OO 长为半径作弧[图 5(1)];以 O' 为圆心, $O'O$ 长为半径作弧[图 5(2)].



图 5

（教师根据语句作出图形，“区别”请四名学生回答.）

二、讲 授 新 课

师：今天我们学习三种基本作图.

[例 1] 作一个角等于已知角.

已知：$\angle AOB$（图 6 左图）.

求作：$\angle A'O'B'$，使 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

分析：如果在 $\angle AOB$ 中，以 O 为圆心，任意长为半径作弧交 OA、OB 于 C、D 两点，可以作出 $\triangle COD$，那么，作 $\angle A'O'B'$，使其等于 $\angle AOB$ 的问题，就转化为作 $\triangle C'O'D'$，使其全等于 $\triangle COD$ 的问题了. 这样，同学们根据已学的知识就可以解决问题了.

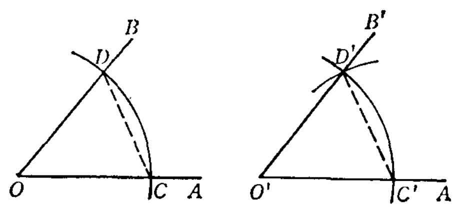


图 6

作法 (1) 作射线 $O'A'$.

(2) 以点 O 为圆心，以任意长为半径作弧，交 OA 于 C，交 OB 于 D.

(3) 以点 O' 为圆心，以 OC 长为半径作弧，交 $O'A'$ 于 C'.

(4) 以点 C' 为圆心，以 CD 长为半径作弧，交前弧于 D'.

(5) 经过点 D' 作射线 $O'B'$.

$\angle A'O'B'$ 就是所求作的角.

[由于这是向学生讲授的第一种基本作图问题，教师要规范地写出已知、求作和作法. 分析问题时，教师应善于启发诱导学生进行思考，并运用上节课所学的知识去解决问题. 用来表达作法的作图语言一定要规范，作法讲完后还要作范句的表述训练.]

证明 连结 CD、$C'D'$，由作法可知，$O'C'=OC$，$O'B'=OB$，$C'D'=CD$，

$$\therefore\quad \triangle C'O'D' \cong \triangle COD\ (SSS),$$

$$\therefore\quad \angle C'O'D'=\angle COD(\text{全等三角形对应角相等}),$$

即
$$\angle A'O'B'=\angle AOB.$$

[证明过程可先让学生自己看书，教师作扼要的讲解，然后写出证明过程，也可以让学生口述，教师板书，师生共同完成.]

[例 2] 平分已知角.

师：同学们能否写出已知，求作？

生：已知：$\angle AOB$.

求作：射线 OC，使

$\angle AOC=\angle BOC$.

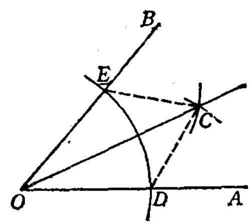


图 7

师：假定 $\angle AOB$ 的平分线 OC 已作出(图 7)，如何在 OA、OB、OC 上取点，使其组成的两个三角形全等？如图 7 所示，$OE=OD$，$CE=CD$，$OC=OC$，则 $\triangle OCE \cong \triangle OCD$，这样 $\angle BOC=\angle AOC$，问题解决了.

请同学们具体讲一下作法.

生甲：作法：(1) 在 OA 和 OB 上分别截取 OD、OE，使 $OD=OE$.

生乙：(2) 分别以 D、E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，在 $\angle AOB$ 内，两弧交于点 C.

师：为什么半径要大于 $\frac{1}{2}DE$？

生丙：分别以 D、E 为圆心，只有以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧才能有交点 C，否则两弧不相交，就找不到交点 C.

生丁：(3) 连结 OC，射线 OC 为所求角的平分线.

师：这样保证了 $\triangle OEC$、$\triangle ODC$ 中，三边相等，并可推得三角形全等，所以 $\angle BOC=\angle AOC$.

证明(略).

[教师应着重于问题的分析、作法与证明. 例 2 可让学生看书后，由师生共同来完成. 至于半径为什么要大于 $\frac{1}{2}DE$，可由教师向学生提问，引起他们的争议，然后阐明原由. "分别以 D、E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，在 $\angle AOB$ 内，两弧交于点 C"，这句作图范句，应让学生口述，加以训练.]

[例 3] 经过已知直线外的一点作这条直线的平行线.

师：请学生讨论一下，平行线与角有什么关系？能不能通过角的关系来作已知直线的平行线呢？

(学生议论片刻后，指定一名学生板演，写出已知、求作，并口述分析和作法，师生共同解决这道作图题.)

生甲：已知：直线 AB 和 AB 外一点 M.

求作：直线 $CD\parallel AB$，且 CD 经过点 M.

生乙：如果 CD 已作出(图 8)，$CD\parallel AB$，且 CD 经过点 M，这样过 M 的任一

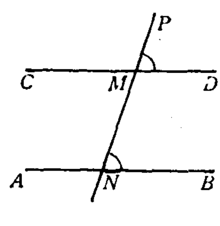


图 8

条不与 CD 重合的直线 MN 均与 AB、CD 相交，则根据平行线的性质，其同位角相等，即$\angle PMD=\angle PNB$. 这样，求作过点 M 且平行于 AB 的直线 CD，就可归结为作出 $\angle PMD=\angle PNB$ 的问题了.

生丙：作法：(1) 过点 M 作直线 MN，交直线 AB 于 N.

(2) 过点 M 作 CD，使同位角 $\angle PMD=\angle PNB$.

直线 CD 就是所要求作的平行线.

师：同学们考虑得十分周到，通过将未解决的问题转化为已解决的问题，作出了本节课要讲的第三个基本作图. 这种解决问题的思想方法在数学研究和学习的过程中会经常用到，同学们对此应牢固地掌握.

[这里把一个基本作图的教学作为前两个基本作图的应用，完全让学生自己分析、讨论去解决，老师只作必要的点拨，这对培养学生分析问题、解决问题的能力是很有益的.]

(对作图中的两条作图范句，让学生口述，对学生口述中所出现的错误，教师要及时予以矫正，并让其做如下的填空练习：

过点____作直线____，交直线____于____点；过点____作CD，使同位角____＝____.

作图的证明过程很简单，由作法便可推得. 因此，教师只需在学生完成作图后，作些简要的点拨即可)

三、课堂训练

练习题：

1. 作一个角使它等于已知角的补角(要求写出已知、求作、作法).

2. 作一个角等于 45°(只要求作图).

3. 如图 9，已知直线 MN 和 MN 外一点 P，求作直线 $EF\parallel MN$，且 EF 经过点 P(只要求作图).

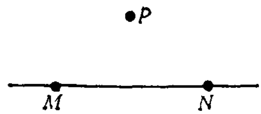


图 9

(为了节约教学时间，练习题在课前可抄在小黑板上，需用时挂出．每小题可分别让一名学生上黑板板演，其余学生在下面练习．学生板演后教师组织评讲，并尽量让学生来回答．)

师：第1题中作一个角等于已知角的补角，有不同的作法吗？

生甲：先作一个角等于已知角，然后延长角的一边就可得出所求的已知角的补角．如图10所示，$\angle B'O'C'$ 就是所求作的角．

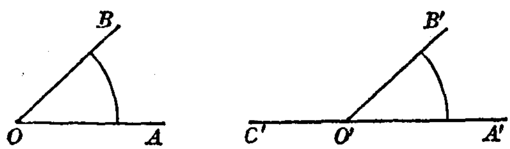


图 10

生乙：还可以先作出已知角的补角，然后作一个角等于这个补角．

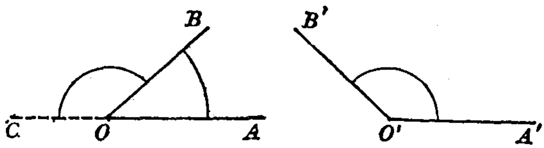


图 11

如图11所示，$\angle A'O'B'$ 就是所求作的角．

师：两个同学的作法都是正确的．

同学们在解第2题时，是否也有不同的作法呢？

生丙：先用 45° 的三角板画出 45° 的已知角，然后由基本作图作出等于已知角 45° 的角.

师：这种作法是对的．它借用了 45° 的三角板．同学们有没有只用直尺和圆规来作出 45° 角的方法呢？

生丁：有！因为 45° 的角是直角的一半，而直角又是平角的一半．因此，在我们学习了平分一个角的基本作图之后，便可通过角平分线的作图来解决上述问题．作法如图 12 所示：任作一条直线 AB，在其上任取一点 O，以 O 为圆心，任意长为半径作弧，分别交 OA 于 C，交 OB 于 D；再分别以 C、D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧，两弧相交于 E，连结 OE，显然 OE 平分平角 AOB，$\angle DOE$ 为直角；再作 $\angle DOE$ 的平分线 OF，则 $\angle BOF=45°$，$\angle BOF$ 即为所求作的角(图 12).

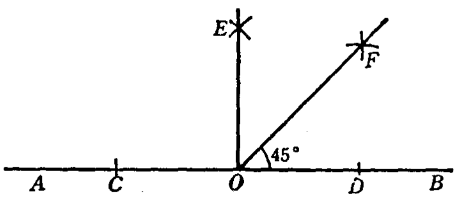


图 12

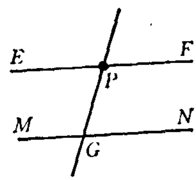


图 13

师：对！现在请同学说一下第 3 题怎样作？

生戊：过点 P 任作一直线与 MN 相交于 G，过 P 作直线 EF，使内错角 $\angle GPE=\angle PGN$，EF 为所求作的直线(图 13).

四、小　　结

师：本节课，我们学习了三个基本作图．即：

(1) 作一个角等于已知角；

(2) 平分一个角；

(3) 经过直线外的一点作这条直线的平行线.

并通过课堂训练对这三个基本作图的方法进行了练习. 课后,同学们需要再进一步"消化",更熟练地掌握这些作图方法.

用尺规进行正确的作图通常需要有四个步骤才算完成. 请问是哪四个步骤呢?

生: 尺规作图有: 已知、求作、作法和证明四个步骤.

师: 目前在这四个步骤中,我们只要求写出已知、求作和作法三个步骤. 证明这一步骤现在不作要求,可省略.

学习基本作图,首先要学会正确使用作图语言.

例如,在使用直尺作图时,范句有:

(1) 过____点、____点作直线(或射线)____;

(2) 连结____两点;

(3) 延长____与____相交于____;

(4) 延长____到____点,使____等于____.

又如,在使用圆规作图时的范句有:

(1) 在____上截取____等于____;

(2) 以____点为圆心,____为半径作弧;

(3) 以____点为圆心,____为半径作弧交____于____点;

(4) 分别以____点、____点为圆心,以____、____为半径作弧,两弧相交于____点.

(以上范句的填空,让学生完成,教师作些必要的说明.)

师: 以上作图范句,同学们要在理解的基础上,背熟、记住,并会运用自如.

五、作　　业

复习课本上三个基本作图, 并进一步弄懂课堂训练的三道练习题.

课本习题(略).

自我评述

(1) 五种基本作图的教学宜安排三个课时. 本教案是第一课时，解决三个基本作图；第二课时解决另外两个基本作图；第三课时讲解例题和练习.

(2) 尺规作图是平面几何教学的重要组成部分，而基本作图又是几何作图的基础. 因此，五种基本作图的教学十分重要. 在设计这一教案时，除了突出作图方法外，还力图在作图思路的分析，作图的语言表述上下功夫，以培养学生分析、作图和语言表达的能力. 在讲"分析"这一步时，我着重把"怎样想出来的"和"为什么这样想"的思维过程揭示出来，让学生多想多做，从而达到教学目的.

(3) 在教材处理上，本教案对课本上的五种基本作图顺序略加变动. 因为"经过已知直线外的一点作这条直线的平行线"，实际上是作同位角相等的问题，因此，将这个基本作图提前到"平分已知角"之后，并安排在第一课时内完成. 这样做，既强化了作角的教学，又方便了学生学习平行线的作图. 另外，本教案在课堂训练中所设置的一个"作一个角等于 45°" 的练习，可为下课时"作一条直线的垂线"设下伏笔.

(4) 在课堂教学的过程中，我力图加强如下两个环节的教学：一是复习有关知识，为学习新知识作准备. 这里复习的有关知识不仅是上一课时所学的，而且还包括学习新知识所需用到的有关知识. 例如本课时在讲授新课前，安排了"已知三边，求作一个三角形"的练习. 这不仅对上一课时中所学的"边、边、边"定理起到了复习巩固作用，而且为学习新课作好了准备. 事实上，基本作图"作一个角等于已知角"，就是利用了这个定理. 二是加强每课时的小结. 小结不应只是对本课所授知识的简单、机械的重复，而是

应该根据教师在课堂教学中所获得的反馈信息，对教学给予补漏补缺，从而进一步加深学生对知识的理解和掌握.

(5) 课堂教学是教师的教和学生的学的双边活动的总和，是教师的主导作用和学生的主体作用的综合．从学生获得知识，形成能力这个角度上讲，学生是主体，知识和技能是客体，教师的“教”是为学生的“学”服务的．强调在课堂教学中发挥学生的主体作用，就是要让学生在课堂教学过程中，自己动脑、动口、动手去学习知识，训练技能．也就是要让学生“全面参与”课堂教学的全过程．教师在教学过程中，应该多向学生提供观察、操作、思考、猜想、归纳、验证等学习机会，这样才能达到学生全面参与教学活动的目的．本教案就是在这个教学思想指导下，尽量让学生参与课堂教学的全过程，师生互相协调合作，形成一个生动活泼的课堂教学的新秩序.

三角形"四心"概念的复习

范用德（新疆巴州二中）
阮树澄（新疆农二师八一中学）

作 者 简 历



范用德　　阮树澄

范用德　北京市人，1962年毕业于北京师范大学数学系，同年任新疆巴音郭楞蒙古自治州第二中学数学教师．1988年被评为中学高级教师．现任巴州二中数学教研组长，州数学会常务理事，新疆数学教研会理事．

阮树澄　浙江绍兴人，1965年由上海支边进疆，靠自学获得专科、本科毕业证书，1988年被评为中学一级教师，曾多次被评为农二师优秀教师，1986年获新疆"优秀专业技术工作者"称号．现任新疆农二师八一中学数学教师．

教学目的

(1) 使学生掌握三角形的重心、垂心、内心、外心的概念．

(2) 使学生懂得两点间的距离与点到直线的距离两概念的区别及其求法．

(3) 使学生养成多思的习惯，初步学会"一题多变"的学习方法．

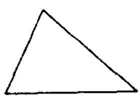
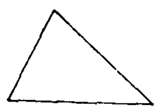
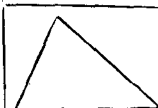
教学过程

一、复　　习

师：什么是三角形的重心、垂心、内心、外心？

什么是点到直线的距离？点到点的距离？

（学生思考后填写事先印好的表.）

	重　心	垂　心	外　心	内　心
定义	三角形的三条____的交点	三角形的三条____的交点	三角形的____的圆心，也就是三角形三边的____的交点	三角形的____的圆心，也就是三角形三内角的____的交点
图形				
性质	三角形的重心分中线比为____		三角形的外心到____距离相等	三角形的内心到____距离相等
位置与三角形的关系	必在三角形的____	锐角三角形在____钝角三角形在____直角三角形在____	锐角三角形在____钝角三角形在____直角三角形在____	必在三角形的____

（学生填表时，教师巡视，看到有的学生不会填"四心"位置，启发他们多画几个不同形状的三角形试试，让学生学会从特殊到一般的思想方法.）

师：三角形的重心有什么性质？

生甲：分中线为1:2.

生乙：分中线为3:1.

师：应当把重心看成中线的内分点，即顶点到重心与重心到对边中点的距离之比是2:1. 三角形的垂心性质，课本上没有明确提出过，不必填上. 但如果题中有两条以上的高线，就应想到"四点共圆".

如图1，H是垂心，有几组四点共圆？

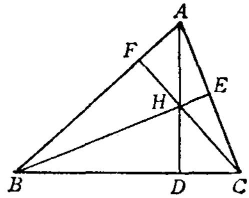


图 1

(学生回答略.)

师：外心与内心各有什么性质？

(学生回答略.)

师：这两个性质中所提到的"距离"是否一样？

(学生回答略.)

[通过上述问题的讨论，让学生从对比中认识点到点的距离与点到直线距离的区别，从而更好地理解概念，加深印象.]

(教师在黑板上画一个直角三角形，一个钝角三角形，让学生上黑板作垂心，然后归纳总结.)

师：锐角三角形的垂心必在形内，钝角三角形的垂心必在形外，直角三角形的垂心就是直角顶点.

[通过实际画图，强化垂心可能在形外的情况，练一遍胜过背几遍.]

师：至于外心，请同学们课后用同样的方法画几个不同形状的三角形来验证结论的正确性.

上面，我们归纳了"四心"中每个"心"与三角形的相对位置关系. 下面，我们再考虑"四心"在同一三角形中的位置有什么关系？先考虑在等腰三角形中"四心"的位置关系.

生：都在同一条直线上.

师：在哪一条直线上？

生：在底边上的中线或底边上的高或顶角的平分线上.

师：对！三线合一，“四心”在三角形的对称轴上.

师：等边三角形的“四心”位置又有什么关系呢？

生：都重合成一个点了.

师：这“四心”共点，这个点叫什么名称？

生：“中心”.

师：等边三角形也叫做正三角形. 正三角形的重心、内心、垂心、外心重合成一个点，就是正三角形的“中心”. 而正多边形的外接圆圆心叫做正多边形的“中心”. “中心”是正多边形所特有的，不是正多边形就没有中心. 因此三角形中只有等边三角形才有中心，其他三角形都没有中心.

[把课本中学过的几个“心”都串起来了，揭示出其内在的联系，让学生能够系统地掌握知识.]

二、练　　习

师：我们先做下面的练习：已知三角形的三边长分别为5、12、13，那么垂心到外心的距离是多少？

生：6.5.

师：怎么得到的？

生：如图2，因为已知三角形是直角三角形，外心是斜边的中点，垂心是直角顶点，所以，此两“心”距离是斜边中点到顶点的距离，利用直角三角形斜边上中线等于斜边一半的性质，便可得出已知三角形的垂心到外心的距离为 $\frac{13}{2}=6.5$.

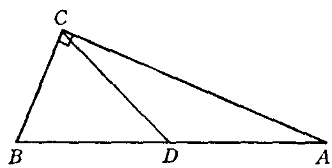


图 2

师：为什么已知三角形是直角三角形呢？

生甲：根据勾股定理得出.

师：对不对？

(生甲一时回答不出.)

生乙：不对，应是根据勾股定理的逆定理.

师：对！回答推理根据时，要弄清是勾股定理还是勾股定理的逆定理.

(教师让学生叙述勾股定理及其逆定理，分析其区别与联系.)

师：重心到垂心的距离是多少？

生：$6.5\times\frac{2}{3}=4\frac{1}{3}$.

师：为什么乘以$\frac{2}{3}$？

生：根据重心性质.

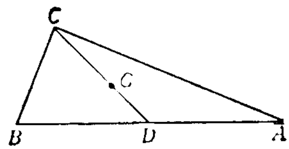


图 3

师：性质是2:1，而现在是2:3，其中有什么关系？请大家观察图3进行思考.

[提出这个问题的目的，是为了帮助中、下程度的学生进一步理解线段比的变化，明白解题的道理.]

师：垂心到最长边的距离是多少？

先请同学们思考一下，这距离应是图2中哪条线段的长度？

生甲：是斜边上的高.

师：怎样计算斜边上的高呢？

生甲：可以用相似形计算.

师：有没有更简便的办法？

生乙：利用面积计算.

$$\because\quad S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch,$$

$$\therefore\quad h=\frac{ab}{c}=\frac{5\times12}{13}=\frac{60}{13}.$$

师：利用面积解题是一种常用的办法，同学们应对此引起足够的重视，灵活地加以运用.

重心到最长边的距离是多少？

生：如图4，重心到最长边的距离是指GH的长，通过两线平行，对应线段成比例的性质，可计算出GH的长为$\frac{60}{13}\times\frac{1}{3}\left(即CE\times\frac{DG}{DC}\right)$，结果是$\frac{20}{13}$.

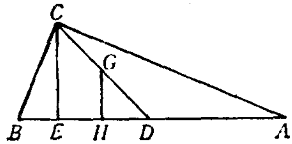


图 4

师：对！这里同样也用到了重心的性质.

[反复运用重心性质，有利于学生记忆和灵活应用.]

师：外心到最短边的距离是多少？

生：如图5，外心到最短边的距离为$DF=\frac{1}{2}\times 12=6$.

（反应快的学生脱口而出是6，教师追问其理由，并顺便复习有关定理.）

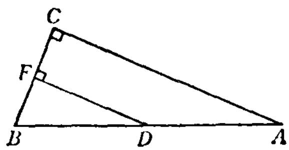


图 5

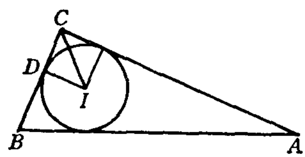


图 6

师：内心到重心的距离是多少？

（学生交头接耳，纷纷讨论解题的方法，教师简要地指出解题的关键.）

师：问题的关键是求出内切圆半径r，然后，在等腰直角三角形DIC中，求出内心到垂心的距离CI，那么怎样来求出r呢？请同学们思考一下.

生：根据我们以前在课堂练习中所做过的题目，知道$r=\frac{a+b-c}{2}$.

师：对！这是直角三角形的重要性质之一，希望同学们牢记结

论并学会运用.

对于这道练习题的结论，我已换了不少问法，也就是从一个问题演变出其他一些问题，这种"一题多变"与我们以前介绍过的"一题多解"方法一样都是些好的学习方法. 同学们做好题目后，可以思考一下，是否有其他解法——这就是"一题多解"；还可以思考一下，能否把已知条件或求解结论"变"一下——这就是"一题多变". 请大家模仿我刚才的做法试着变变看. 当然，有的题目改变以后，可能超过你们现有的知识范围，解不出来，这不要紧，同学们可以互相讨论或者问老师来加以解决. 另外，刚才我是通过改变题目的结论来实现一题多变的，还可以改变题目的条件. 譬如，刚才那道题，把三边的长度改一下，还可以变出不少题目来. 限于你们的知识水平，编不等边三角形的题目比较难做，直角三角形的我已编过，你们可以编等腰三角形的试试看，并说出解题的基本思想.

[要使学生学好数学，不仅要求学生能一题多解，还要学生能"一题多变"，这样才能真正掌握概念，活学学活. 教学中通过对命题结论的更改，引出新命题，可以培养学生思维的多发性；通过对命题条件的更改，引出新命题，可以培养学生思维的探索性；通过特殊到一般及一般到特殊的联想，可以培养学生思维的深刻性，跳跃性. 所以说，"一题多变"是培养学生思维的一种有效手段.]

生丙：三角形三边长为 6、6、5，求：

(1) 三角形外心到重心的距离；

(2) 三角形外心到最短边的距离.

这道题的关键是求外接圆半径 R，用三角形面积公式 $S_\triangle=\frac{abc}{4R}$ 很方便，也可以用正弦定理.

生丁：三角形三边长为 10、10、$10\sqrt{3}$. 求：

(1) 三角形外心到重心的距离？

(2) 三角形内心到最长边的距离?

这道题实际上是两个三边长为 $1:\sqrt{3}:2$ 的直角三角形拼成的等腰三角形. 第 (2) 小题是求此等腰三角形的内切圆半径, 如图 7, 可用面积公式 $S_{\triangle}=rs$ 求, 即

$$\frac{1}{2}ah=r\left(\frac{a+b+c}{2}\right);$$

还可以利用等腰三角形三线合一, 设内切圆半径为 r, 列出方程来解.

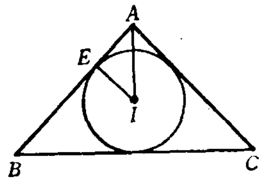


图 7

师: 好! 具体如何解这两道题, 留给大家作课外练习, 答案明天公布在黑板报上.

三、小　　结

师: 三角形的主要线段——中线、高、内角平分线及各边的垂直平分线各交于一点, 这是客观规律. 人们掌握了这一规律后, 为了叙述方便, 给它们取了名字——三角形的重心、垂心、内心、外心. 这"四心"不要混淆, 中线是"重心"("中"与"重"谐音), 高线是垂心(高与垂直有关), 外接圆圆心是外心, 因它到三角形三顶点距离相等, 故必是三边垂直平分线的交点. 内切圆圆心是内心, 因它到三角形三边距离相等, 所以它必在三内角的平分线上.

[这小结不是简单的重复, 而是告诉学生"四心"的来历及记忆办法, 对学得差的学生尤有帮助.]

师: "四心"在同一三角形中的位置关系是: 等腰三角形中"四心"共线, 在对称轴上. 等边三角形中"四心"共点, 称为"中心".

师: 任意三角形中"四心"又有什么位置关系呢? 同学们可以画图试试看, 是否有三"心"在一直线上. 然后设法自己证明一下你的结论.

[其实从例题中就可以看出, 直角三角形的外心、重心、垂心在一直线上, 故可以猜想任意三角形的此三"心"共线, 这样给学有余

力的学生留下了一道结论未确定的半开放性习题.]

师:"一题多变"是一种好的学习办法. 同学们解好题后要多思、多回味, 养成"一题多解","一题多变"的思考习惯. "一题多变"可以变题目的结论, 也可以变题目的条件, 你们经常这样训练自己,就可以从被动的做习题变为主动的想问题,就能真正做到举一反三,灵活运用.

四、作业布置

略.

教案说明

这是一堂复习课. 我们是怎样想到设计这一堂课的呢?

一是调查了学生的学习情况. 觉得"四心"在课本中是分散在几个章节里讲解的, 相当一部分学生对"四心"概念的理解是混淆不清,因此有必要花一堂课帮助学生归纳整理.

二是从教学目的上考虑到数学教学的目的不仅仅是向学生传授知识, 还必须培养学生的能力. 学生从初一到初三,随着年龄、知识的增长,思维能力已有一定的提高. 但还未达到质的飞跃. 大部分学生为解题而解题, 解完题后不善于思索, 回味, 不善于总结经验, 思维是"被动型"的. 为了培养学生的创造性思维, 我们觉得有必要在以前讲过的"一题多解"的基础上, 向学生介绍"一题多变"的学习方法,变"被动型"思维为"主动型"思维.

三是从课的类型及内容上看, 复习课如果光列些条头糕式的概念, 学生听起来没劲, 教学效果也不会好. 于是便想到边讲概念边练习、边总结的办法. 在讲例题的时候, 避免了东一榔头,西一棒子地让学生做些题目的做法,而是采用"一题多变"的方法把一道题搞深搞透,即由 5, 12, 13 这一组勾股数引出一系列的

变化，构造出各类不同的问题，在“变”中求“深”.

四是从教育学、心理学角度看，初中学生注意力集中的时间不会太长，尤其是复习课，如果把它上成“炒冷饭”课，没有什么新东西，就会使学生更容易感到厌倦. 因此，在备课时，就要开动脑筋，如何充分利用45分钟，想方设法吸引学生的注意力，活跃他们的思维. 到最后课快结束时，也就是学生容易疲劳的时候，我却刚把课引到了高潮，让学生自己编题. 大部分学生跃跃欲试，非常兴奋，感到居然自己也能编题给别人做，中上等学生能在教师指导下自己动脑动手编出题来，说明他们潜在的创造力已发挥出来了. “一题多变”可以激发学生学习的兴趣，调动学生学习的积极性，而且还可以在学生获得知识的同时，提高他们发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力，使他们真正成为课堂教学的主体.

当然“一题多变”不是一朝一夕就能培养成的，需要有一个模仿的过程，也需要教师在课堂教学或课后辅导等适当机会中多加引导、启发，这样才能使学生由模仿飞跃到自觉想到“变”，在“变”中长思维、长知识、长能力的阶段.

平行四边形的判定

彭声铭（江西省龙南中学）

作者简历



彭声铭　江西龙南人，1944年肄业于厦门大学电机系，1962年上海华东师范大学数学系函授结业，1950年起任龙南中学数学教师．1980年、1986年先后被评为江西省中学特级教师、高级教师．1956年、1985年先后两次获江西省优秀教师称号，1980年、1982年先后两次获江西省劳动模范称号．曾兼任江西省数学会理事，江西省中学数学教学研究会副会长．1987年退休．

教学目的

(1) 使学生掌握平行四边形的判定定理，并会初步应用．

(2) 通过学生口述论证过程，培养学生的口头表达能力与逻辑推理能力．

教学过程

一、导　　言

师：我们用两个全等的三角板按不同的方法拼成四边形，可以有多少种拼法？

（教师演示，并归纳出如下六种四边形.）

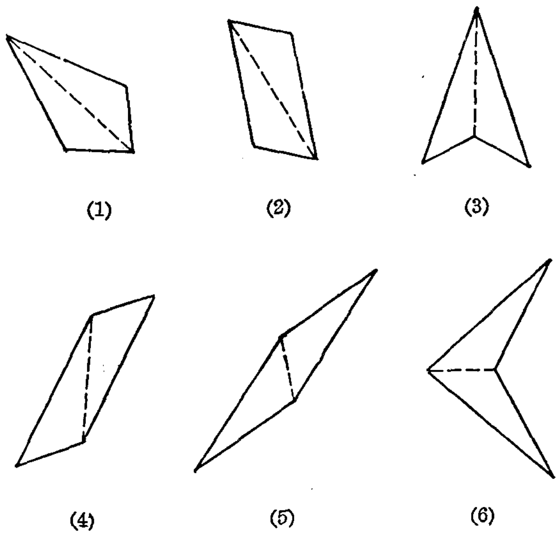


图 1

师：这样两个图形一拼，共有六种四边形．请同学们考虑，其中有没有平行四边形呢？

[新课一开始，就用平行四边形的变式图形，而不用标准图形，这有利于克服思维定势.]

师：图1(2)、(4)、(5)是平行四边形．如何来判定一个四边形是平行四边形？有哪几种判定方法？今天这一节课就是研究这一问题.

（板书课题：“平行四边形的判定”）

二、复习提问

师：(1)请叙述平行四边形的定义；(2)分别说出平行四边形的边、对角线和角所具有的性质.

(指定两名同学分别回答，学生回答问题(1)、(2)后，教师板书：

平行四边形的定义：两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

平行四边形的性质：

从边考虑：$\begin{cases}\text{一组对边平行且相等；}\\\text{两组对边分别相等.}\end{cases}$

从对角线考虑：对角线互相平分.

从角考虑：两组对角分别相等(或一角与它两邻角互补).)

师：什么叫做逆命题、互逆命题？什么叫做逆定理、互逆定理？

(指定一名同学回答，教师作一简单小结.)

三、新　课

师：两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形. 这是平行四边形的定义. 判定一个四边形是不是平行四边形，除了根据定义，还有哪几种判定方法？先请同学们回忆一下：等腰三角形的判定定理是怎样讲的，它与性质定理的关系如何？

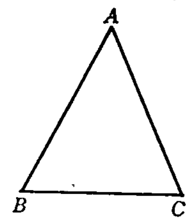


图 2

生甲：在 $\triangle ABC$ 中(图 2)，若 $\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$. 这是等腰三角形的判定定理，简述为"等角对等边".

在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=AC$，则 $\angle B=\angle C$. 这是等腰三角形的性质定理，简述为"等边对等角". 其间的主要区别在于：等腰三角形的判定定理是其性质定理的逆定理.

生乙：平行四边形的判定定理也是其性质定理的逆定理.

师：请同学们讲一下平行四边形性质定理的逆命题，并加以证明.

（让学生按黑板最右端书写的"性质"顺序，逐一说出其逆命题，教师分别把它们写在黑板上的最左端，形成鲜明的对照，并要求学生口述其证明过程，允许同学互相补充或纠正错误.）

生丙：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

（教师指出证明第一个判定定理只能用"定义".为了检查同学们理解的情况，教师绘出图3后，要求学生先作一简要分析，继而用定义去证明，最后指出这是课本中的平行四边形判定定理1.）

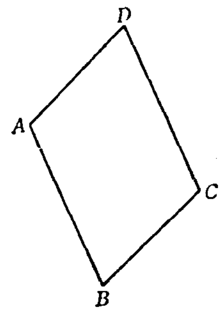


图 3

生丁：两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

（估计一般学生用平行四边形的定义证明. 让学生证明后，指出它还可用平行四边形判定定理1去证，随即指定同学用判定定理1予以证明，最后指出这是课本中的判定定理2.）

生甲：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

（教师先后指定三名同学分别用平行四边形定义、判定定理1、判定定理2予以证明，最后指出这是课本中的判定定理3.）

生乙：两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

（待学生应用四边形的内角和与平行四边形的定义证明后，指出这是课本中的练习题，今后证明有关问题时，也可直接引用它.）

四、小　结

教师将黑板左端的"判定定理"整理成如下形式，以便与黑板右端的"性质定理"相对照：

从边考虑——→{两组对边分别平行；一组对边平行且相等；两组对边分别相等}

从对角线考虑——→对角线互相平分

从角考虑——→两组对角分别相等

}的四边形，是平行四边形

教师再指出：判定一个四边形是平行四边形，一般有上面五个判定方法.

平行四边形知识的运用包括三个方面：一是直接运用平行四边形的性质去解决某些问题；二是判定一个四边形是平行四边形；三是先判定一个四边形是平行四边形，然后再用平行四边形的性质去解决某个问题.

（在板书设计中将整个黑板划分为四个部分，除左、右端书写如上所述的内容外，中间部分是留着绘图和书写必要的、关键性词句.）

[整个过程是在学生初步自学课文的基础上，在教师的引导下，以学生为主进行活动，把传授知识、启迪思维、培养能力和发展智力融为一体. 通过学生猜想结论，证明结论，互相补充，交流心得，可以激发思维，集思广益，取长补短，共同提高，使"学生能在学习的过程中，享受到自我创造的快乐"（霍姆林斯基）. 同时，又促进了师生间的信息交流，使教师能依据学生的反馈信息，及时地进行针对性指导、评价，调整教学程序，改进教学方法. 另外，还注意了板书的计划性、条理性、启发性（比如重要的平行四边形的性质定理与判定定理始终保留在黑板的左、右端），有助于学生观察、对照、记忆、思考.]

五、判定定理的应用

师：请同学们回想本节课开始所拼成的(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)六种不同的四边形，并思考以下问题

把两块全等的三角板，按不同的方法所拼成的六种四边形都是平行四边形吗？为什么？

生甲：只有(2)、(4)、(5)三种四边形才是平行四边形，因为从对应边相等可得出它们的两组对边分别相等；从对应角相等，也可以得出两组对边互相平行．

师：下面，我们来看书上的例题．

[例1] 在▱$ABCD$中，对角线AC和BD相交于点O，M、N分别是OA、OC的中点(图4)．求证：$BM \mathrel{\underline{\parallel}} DN$．

师：在上节课，我们用证两个三角形全等的方法解决了这一问题．现在学了平行四边形的几个判定定理后，可否用判定定理去证明？如何证？

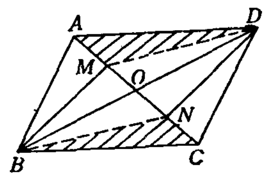


图 4

（待学生应用判定定理3证明后，教师指出，今后遇到这类问题，既可用三角形全等证明，又可用平行四边形知识证明时，要注意选择哪一种方法较简便．）

[在讲述新知识后，注意引导学生利用新知识、新方法去解决某些旧问题，灵活应用所学的知识，有利于进一步激起他们思维的积极性和求知欲．]

师：下面，我们再来看课本的例题．

[例2] 已知：在▱$ABCD$中，E、F分别是边AD、BC的中点(图5)．求证：$EB=DF$．

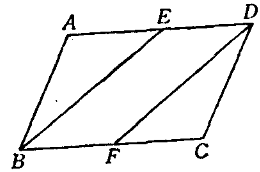


图 5

这是综合应用平行四边形知识来分析问题和解决问题的例子，根据平行四边形定义和性质，判定另一个四边形是平行四边形，再应用平行四边形性质，证明两条线段相等．当然，用三角形全等定理去证，也可解决．

（教师和学生共同证明此例．）

师：下面请同学们口答课本上的练习：

1．已知：□$ABCD$，E是AB的中点，F是CD的中点(图6)．求证：$EF=BC$．

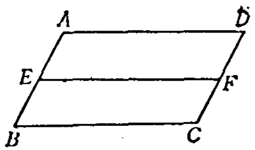


图 6

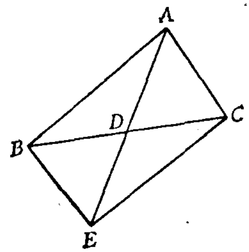


图 7

2．延长$\triangle ABC$的中线AD至E，使$DE=AD$(图7)．求证：四边形$ABEC$是平行四边形．

[练习是学生的心智技能和动作技能形成的基本途径，通过练习，检查教学效果．]

师：请同学们看课本的例题．

[例3]　已知：线段BC和线段所在直线外一点A(图8)．求作：以A为一顶点，线段BC为一边的平行四边形．

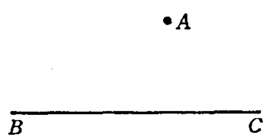


图 8

如果连结AB(或AC)，那么平行四边形的两边已确定，因此要作出符合要求的平行四边形，关键在于确定另一个顶点．如何去确定另一个顶点？

(要求学生除课本介绍的根据平行四边形对边相等的性质作图外，还会利用平行四边形对边平行、对角线互相平分的性质作图，并分别要求学生口述其作法、证明．)

师：本例是定位作图题．我们知道，平行四边形的一边都有两条边与它相邻，有两个互为补角的夹角，所以取其中任意一组作出

的平行四边形都能满足要求．因为是定位作图题，可灵活选用条件，它的解往往不止一个，应注意全面考虑问题，加以讨论．

[安排一些多解问题，有利于培养学生多侧面看问题、全面考虑问题的习惯，加速知识向能力的转化．]

六、课外作业

略．

自我评述

我们设计和应用了"自学、探索——引导、练习"单元教学法．它的传导过程是：教师(发提纲)——学生(自学、探索、讨论)——教师(引导、提问)——学生(口练或笔练、交流、评价)，从信息输入到信息转换(信息交流)，再到信息放大，循环往复．这一立足于引导、培养能力的教学方法，对学生的主体地位和教师的主导作用体现得都较鲜明．

一个单元的长短划分，一般是根据课本内容的结构难易和绝大多数学生的学习能力而定．上述教案是针对初二学生接触平面几何学科不久，仅把平行四边形及其性质与平行四边形的判定作为一个小单元，分三个课时进行的第三个课时．

第一课时，是在课堂上让学生自学、探索这一单元中的主要内容．第二课时，是平行四边形及其性质，与上述第三课时的教学方法大致相同，以提出问题、解决问题组织课堂教学，让学生口头表达，检查他们自学、探索的深度，培养他们的表达能力和思维能力．

正 方 形

王修兰（山东省青岛二中）

作 者 简 历



王修兰　山东黄县人，1966年毕业于山东师范大学数学系，同年在青岛二中任教．多年来一直从事着平面几何教学和初中奥林匹克数学竞赛的辅导工作，曾多次被评为数学竞赛优秀教练员．1988年被评为山东省中学一级教师．

教学目的

(1) 使学生掌握正方形的定义、性质和判定，并能运用它们证明有关的命题．

(2) 通过对正方形的定义、性质和判定的引入及有关证明，培养学生的数学素养和数学能力．

教学过程

一、复习提问

师：在四边形这一章里，我们已学过三种特殊四边形，它们依次是平行四边形、矩形和菱形．请同学们说出它们的定义．

（学生边回答，教师边演示活动教具，使平行四边形有一个角是直角，得到矩形；使平行四边形一组邻边相等，得到菱形，并在黑板上画出图1中的四边形、平行四边形、矩形、菱形及箭头．）

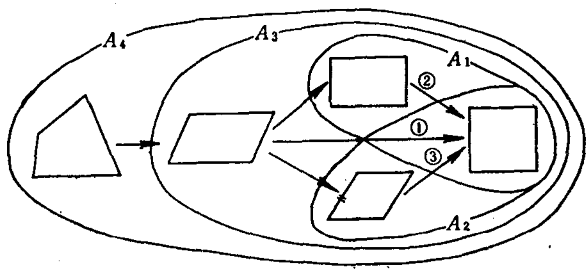


图 1

二、讲授新课

1．正方形的定义

师：现在，我们学习正方形（活动演示教具呈现出正方形）．正方形，我们在小学已经熟悉了，观察它的边角有什么特性，它与平行四边形比较一下，有什么区别与联系？如何改变平行四边形的条件，才能得到一个正方形呢？

生：使平行四边形的一个角是直角，并使它的一组邻边相等就变成正方形（演示过程如图2）．

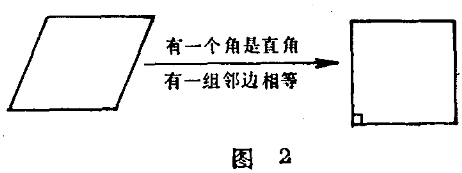


图 2

(学生边回答，教师边演示活动教具，并在黑板上画出图 1 中的正方形及箭头①.

由学生归纳出正方形的定义(板书)：

有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.)

[在已学过平行四边形、矩形和菱形概念基础上，运用四边形活动演示器，引导学生根据自己的直觉，观察、分析和比较，找出正方形与平行四边形的差异和联系，抓住正方形的本质属性，抽象概括出正方形的定义. 由于学生亲自参与了由感性认识到理性认识、由具体到抽象概括这一思维过程，学会透过现象看本质，因此，有利于培养学生观察、分析问题的能力，而让学生从中体会和揣摩抽象思想，形成抽象意识，则有利于培养学生思维的深刻性和抽象概括能力.]

师：正方形定义的要点是什么呢？它与矩形、菱形有什么区别和联系呢？

(在师生共同分析的基础上，教师小结.)

师：正方形定义有三个要点：(1)必须是平行四边形；(2)有一个角是直角；(3)有一组邻边相等. 其中(1)和(2)是矩形定义的条件，所以正方形是一种特殊的矩形——一组邻边相等的矩形 [蕴含(3)]，也就是说正方形属于矩形集合；(黑板上画出图 1 中的指示箭头 ② 及矩形集合 A_1.) 而其中 (1)和(3)是菱形定义的条件，所以，正方形又是特殊的菱形——有一个角是直角的菱形[蕴含(2)]，也就是说正方形又属于菱形集合；(黑板上画出图 1 中指示箭头 ③ 及菱形集合 A_2.)矩形、菱形和正方形又都是特殊的平行四边形，也就是说它们都属于平行四边形集合；(黑板上画出图 1 中的集合 A_3.) 平行四边形、矩形、菱形和正方形都是特殊的四边形，也就是说它们都属于四边形集合. (黑板上画出图 1 中的四边形集合 A_4.)

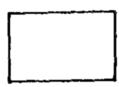
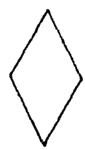
由上分析，正方形是矩形集合和菱形集合的公共部分（即交集）.

[通过对正方形、矩形和菱形概念要点的分析、纵横比较，容易看出正方形概念的内涵中包括矩形和菱形概念的内涵，从而在外延关系上得出正方形是特殊的矩形和菱形，而它们又都是特殊的平行四边形. 从对正方形概念的研究，转向侧重于对平行四边形整体的研究，转向侧重于对平行四边形、矩形、菱形和正方形之间联系及其逻辑结构的研究. 这样做，不仅加深了对各种特殊平行四边形概念的理解，把所学的知识系统化，而且增强了整体意识，有助于培养学生思维的广阔性，培养求异思维，从而提高学生的辩证思维能力.]

2. 正方形的性质

师：因为正方形是特殊的平行四边形、特殊的矩形和特殊的菱形，所以它具有它们所有的性质，请同学们说出正方形的性质.

（学生口答，教师按下列形式板书.）

			
边	对边平行		四条边相等 (包括对边相等)
角	对角相等 邻角互补	四个角都是直角 (包括对角相等)	
对角线	对角线互相平分	对角线相等	互相垂直，每条对角线平分一组对角

[这是由一般到特殊的演绎推理. 通过上面列表形式叙述，从横向按边、角和对角线次序列出正方形的性质，体现了思维的条理

性和组织性，从纵向容易看出正方形的性质完全蕴含于平行四边形、矩形和菱形的性质之中，从而使它们的共性和个性一目了然，使学生便于比较记忆.]

师：下面我们来讨论，如何作一个边长为 a 的正方形（图 3）并回答：

(1) 正方形一条对角线和一边的夹角是多少度？为什么？

(2) 一条对角线把正方形分成两个什么样的三角形？为什么？

(3) 两条对角线把正方形分成四个什么样的三角形？为什么？

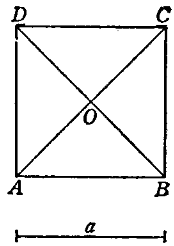


图 3

[上述问题开拓了学生的思路，加深了学生对正方形定义和性质的理解.]

3．正方形的判定方法

师：根据图 1 中正方形与平行四边形、矩形和菱形之间的关系，请同学们说出正方形有哪些判定方法？

（学生口答，教师板书.）

(1) 用定义（图 1 中指示箭头①）.

(2) 有一组邻边相等的矩形是正方形（图 1 中指示箭头②）.

(3) 有一个角是直角的菱形是正方形（图 1 中指示箭头③）.

(4) 既是矩形又是菱形的四边形是正方形（矩形集合和菱形集合的公共部分）.

[掌握了整体结构，这四种判定方法是显而易见的.]

三、巩固练习

1．问答题（小黑板）

师：对角线相等的菱形是正方形吗？

（学生议论，教师请学生回答，好学生能回答出来，中等偏下的学生回答不完整，老师作总结.）

师．因为菱形是平行四边形，而对角线相等的平行四边形是矩形，由判定方法 4，它是正方形.

[把数学的严密逻辑性展现出来，教学生做到言之有理，落笔有据，培养学生的推理意识.]

师：对角线互相垂直的矩形是正方形吗？

生：是(判定 4).

师：四条边相等的四边形一定是正方形吗？

生：不一定，可能是正方形，也可能不是，但一定是菱形.

师：正方形是特殊的菱形，但是菱形不一定是正方形．那么补充什么条件，四条边相等的四边形才一定是正方形？(逆向思维)

生：有一个角是直角(直接用判定 3).

师：还可以补充其他什么条件？

生：对角线相等(判定 4).

[鼓励学生摆脱固有模式，善于从不同角度去思考问题，培养学生的思维灵活性和创造性.]

师：四个角相等的四边形一定是正方形吗？

生：不一定，可能是正方形，也可能不是正方形，但一定是矩形.

师：补充什么条件，四个角相等的四边形才一定是正方形？

生：有一组邻边相等或对角线互相垂直.

师：对角线互相垂直且相等的四边形一定是正方形吗？

（学生众说纷纭，有的说"是"，有的说"不是"，让他们争论，越争越明，说"不一定"的人越来越多，这时教师在黑板上画出图 4 的四边形 $ABCD$，它符合条件，但显然不是正方形.）

师：图 4 的四边形 $ABCD$ 为什么不是正方形？

生：它不是平行四边形，当然不是正方形.

师：补充什么条件，对角线互相垂直且相等的四边形才一定是正方形？

生：平行四边形或对角线互相平分.

[培养学生思维的深刻性、批判性和敏捷性.]

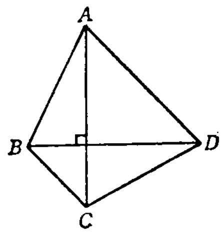


图 4

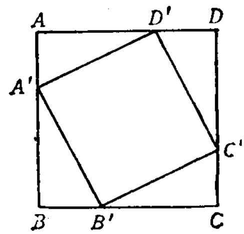


图 5

2．例题

已知：如图5，四边形 $ABCD$ 是正方形，并且 $AA'=BB'=CC'=DD'$.

求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形.

师：(分析)要证明四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形，判定方法有四个，选取哪一个呢(执果索因，分析法)？结合已知条件：四边形 $ABCD$ 是正方形，由其性质，得四条边相等，四个角都是直角．又由 $AA'=BB'=CC'=DD'$，易想到 $A'B=B'C=C'D=D'A$，从而可证四个直角三角形全等，得到其四条斜边相等．于是推出四边形 $A'B'C'D'$ 是菱形(由因导果，综合法)．联想到正方形判定方法3，只须证菱形 $A'B'C'D'$ 有一个角是直角(又是分析法)．除此以外，还有没有其他途径证明呢？

生：可证两个三角形全等，从而证得四边形 $A'B'C'D'$ 一组邻边相等及其夹角是直角．同理，再证出另两个角是直角，用正方形判定方法2证得结论.

3．练习

已知：如图6，矩形 $ABCD$ 中，AF、BH、CH、DF 分别是

各内角的平分线，AF、BH 相交于 E，CH、DF 相交于 G.

求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.

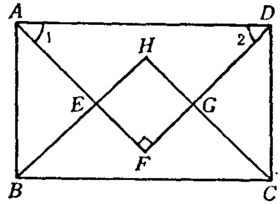


图 6

（先让学生分析，教师启发、点拨，再让学生证明.）

生：（分析）由已知条件，可得 $\angle 1=\angle 2=45°$，于是 $\angle F=90°$，容易证出 $EFGH$ 是矩形（综合法）. 而要证结论，关键是证四边形 $EFGH$ 的一组邻边相等（分析法），如证 $EF=EH$. 因为

$$\begin{cases} EH=BH-BE, \\ EF=AF-AE, \end{cases}$$

其中易证 $AE=BE$，而要证 $AF=BH$，只要证 $\triangle AFD\cong\triangle BHC$（分析法）.

[在寻求解决问题的思路中，按思路的顺逆有综合法和分析法. 而实际运用时，往往是综合法与分析法紧密结合. 用综合法时要随时注意欲证的结论，而用分析法时又要时刻考虑到已知条件. 在这一过程中，应不断培养学生的化归意识，有意识地将问题进行转化，化未知为已知，化难为易，化整为零，然后各个击破. 逐步教学生用联系、发展、运动、变化的眼光观察问题，认识问题，自觉建立联想，调整思维方向，找出解决问题的关键所在，以培养学生思维的深刻性、灵活性、组织性和批判性.]

四、作　业

课本习题（略）.

教案说明

1. 把知识系统化

本节课是正方形的概念课，某种程度上也是四边形这一单元的总结课. 因为不弄清平行四边形、矩形和菱形之间的联系及其逻辑结构，正方形的性质和判定方法就无从讲起，即使勉强讲了，由于知识处于孤立的、零散的状态，学生势必掌握不好，更谈不上培养学生辩证思维能力了，而教材内容在篇幅上又给以充分时间，因此教案首先以集合论为枢纽，把平行四边形及其他几种特殊的平行四边形知识纳入一个系统之中.

2. 用比较的方法

在引入新概念时，采用了比较的方法，通过把直观的正方形和平行四边形做比较，深入浅出地概括出正方形定义. 然后把正方形定义与矩形、菱形定义作比较，找出它们之间的亲缘关系，进而把平行四边形的知识系统化. 而在推证正方形的性质时，又与其他平行四边形性质作比较，找出它们的共性与个性. 总之，恰当地应用比较，不仅能突出概念的本质属性，明确概念的内涵和外延，有利于学生理解和掌握数学概念，而且还简化了某些问题的教学. 学生掌握这种进行判断和推理的重要思想方法，还有利于提高学生认识事物和解决问题的能力.

3. 培养学生数学头脑

在数学教学中，培养学生思维能力，发展学生智力，日益成为教学目的的一个重要方面，这是一个系统工程. 在每一节课中，教师应努力挖掘教材的思想性和科学性，自觉地、有意识地采取相应的教学方法和教学手段，创造必要的教学情境，努力展现知识形成的思维过程，让学生亲身经历探索数学的思维过程，从中领会数学思想方法，形成数学观念和良好的认知结构，培养数学头脑，提高学生分析问题和解决问题的能力，使学生越学越聪明.

勾股定理

王家华（安徽省合肥市一中）

作者简历



王家华　安徽合肥人，1964年毕业于安徽大学数学系，同年任内蒙古哲里木盟巨流河农技校数学教师．1988年被评为安徽省中学高级教师，1989年被授予中国数学奥林匹克高级教练员称号．现任合肥一中数学教师、教导主任，合肥市中学数学教研会常务理事、副秘书长．

教学目的

(1) 使学生了解勾股定理和逆定理的内容．

(2) 使学生掌握面积割补的证题方法．

(3) 通过对图形的割、补、拼、凑，熟悉面积割补法的证题思路，在实践中发现直角三角形三边之间的数量关系，培养学生观察、分析、综合、判断的能力和逻辑推理能力．

教学过程

一、复 习 提 问

师：前面，我们已经学习过有关面积的概念，同学们回忆一下，图形的面积有什么性质？

（学生回答，教师板书.）

生：(1) 两个图形全等，它们的面积相等；(2) 一个图形的面积，等于它的各部分面积的和.

师：如果两个图形的面积相等，那么这两个图形是否一定全等呢？

生：两个面积相等的图形，它们不一定全等.

师：这个问题，我们要特别注意，两个面积相等的图形不一定全等. 我们可以用硬纸片做好两个全等的直角三角形 I、II，拼合成各种不同的多边形进行演示，这些图形面积相等，但都不是全等形.

（用直角三角形 I、II 拼成三角形、四边形，并在黑板上沿硬纸片的外边画出三个图形，如图 1 所示.）

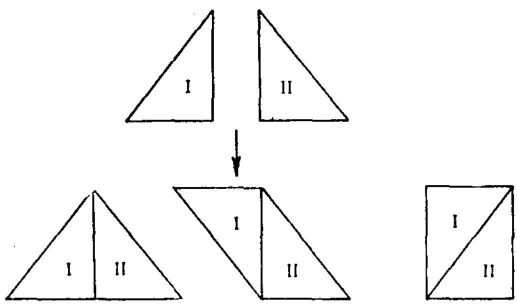


图 1

师：图形面积的两个基本性质很重要，根据这两个性质，我们可以借助于适当的辅助线割补多边形，割补后所成新图形的面积和原图形面积相等，这种方法叫做面积割补法.

二、引入新课

师：这节课，我们将利用面积割补法，探索直角三角形三边之间所满足的关系. 这个关系式，早在公元前一世纪，我国学者就已经发现了，称之为勾股定理，我们能不能找出这种关系呢？

[利用面积割补证明的方法是新的，初中学生不容易想到. 通过复习面积的基本性质，既复习又提高，让学生温故而知新，使他们产生学习上的愉快感，探索直角三角形三边之间的数量关系，并指出所要探究的事实，早在古代，我国学者就已经发现了，这样不仅指出了本课的宗旨，而且可以增强学生的好奇心，激发学生的学习兴趣和求知欲. 既有方法又有宗旨，学生的注意力可以高度集中，保证学习顺利进行.]

师：把两个全等的正方形，用对角线分成四个全等的等腰直角三角形，然后把它们拼成一个正方形(图 2).

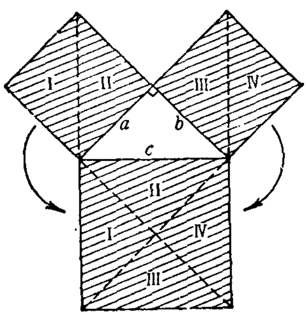


图 2

(用硬纸片做好教具，也可以利用投影仪进行演示.)

同学们可以发现，这个正方形的边，恰好是以前两个正方形的边为腰的等腰直角三角形的斜边. 因此，等腰直角三角形两腰上的正方形面积的和，等于斜边上正方形的面积.

(将演示图形中等腰直角三角形的两条直角边分别标上 a、b，将斜边标上 c，板书：$c^2=a^2+b^2$.)

对于一般的直角三角形，是否也有这种关系？

[由特殊到一般，由简单到复杂，引导学生主动地接受探索数学规律能力的训练.]

三、学生动手，在实践中发现规律

师：为了研究这个问题，请同学们在所发的一张印有单位正方形格子的纸片上，求出具有阴影线条的正方形面积(图 3)，即：确定用多少个单位正方形可以覆盖住大正方形.

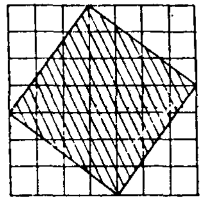


图 3

(课前要通知学生带剪刀，用投影仪或画有小方格的黑板将图形显示出来，教师简单解释，让学生边动手边讨论，他们把画有阴影的正方形剪成几部分，进行拼、凑、补，试图拼成便于测量其面积的形状．教师在巡视过程中，启发学生动手动脑进行探索，并协助学生解决“困难”，教师请使用不同方法的学生公布测量结果.)

生甲：所求正方形的面积可从总面积减去四个全等的直角三角形面积：

$$S=7^2-4\times\left(\frac{1}{2}\times3\times4\right)=25(\text{平方单位}).$$

也可由 I、II 两个正方形(图 4)面积的和组成：

$$S=4^2+3^2=25(\text{平方单位}).$$

生乙：所求正方形的面积是由四个全等的直角三角形 I、II、III、IV 和中间一个正方形 V(图 5)的面积的和组成：

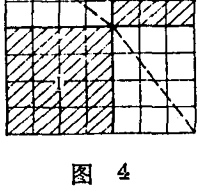


图 4

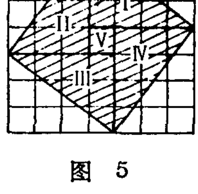


图 5

$$S=4\times\left(\frac{1}{2}\times3\times4\right)+1=25(\text{平方单位}).$$

师：上面同学们公布的结果，都是利用面积割补法得到的.同学们必须懂得：上面的每一种方法的理论根据都是图形面积的两个基本性质.

现在我们采用甲同学的方法，在具有正方形方格的硬纸片上画出图4的形式，将正方形I、II、III剪下，拼成如下的形式(图6).

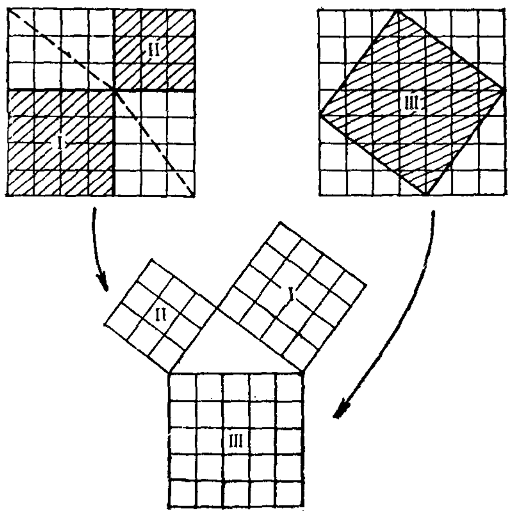


图 6

同学们，你们发现了什么结论吗？

生：直角三角形两直角边上所作的正方形(I)、(II)的面积的和a^2+b^2，等于斜边上正方形(III)的面积c.

师：为了证实这个结论对所有的直角三角形都是正确的，请同学们动手做下面的练习.

(发给每一位学生一张印有单位正方形小方格的纸片，上面印

了类似前面的一些正方形.)

求出图 7 中这些正方形的面积,并将有关的数据填入表中,观察结果,验证直角三角形三边之间的数量关系.

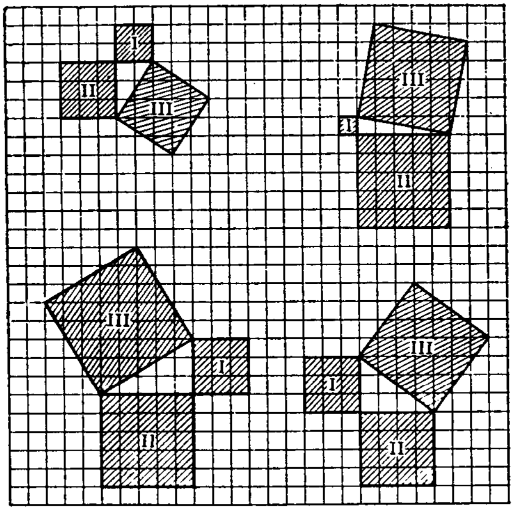


图 7

	A	B	C	D
第一条直角边上正方形面积(I)				
第二条直角边上正方形面积(II)				
斜边上正方形面积(III)				

四、归纳概括、总结定理

师:同学们利用面积割补法计算出了一系列正方形的面积,通过观察比较,发现了这些直角三角形三边之间都满足一个共同的关系.请同学们将这种关系写成定理.

(请一位同学回答,教师板书.)

生：定理：直角三角形两直角边a、b的平方和等于斜边c的平方：

$$a^2+b^2=c^2.$$

师：请一位同学上讲台，在黑板上把这个定理的条件和结论，用已知、求证的形式写出来.

（学生板书：

已知：在Rt△ABC中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$.

求证：$a^2+b^2=c^2$.

用投影仪或在画好图形的小黑板上，教师按照课本内容，一边叙述，一边张贴演示.）

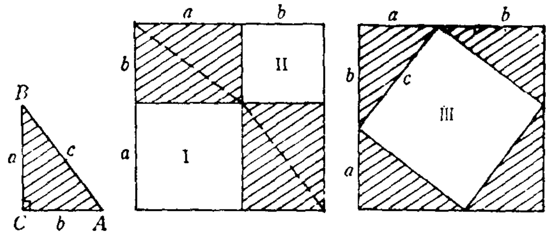


图 8

师：同学们要注意：在证明定理的过程中，用字母符号a、b代表两条直角边，c代表斜边，而不能用具体数字.

[学生虽然熟悉了面积割补法的证题思路，但是要把证明过程用数学语句准确地表达出来，还需要经过严格训练. 教师既要注意教学的趣味性，又要培养学生学习数学的严谨性和科学性，提高逻辑推理能力.]

师：这个定理的逆命题也成立. 请一位同学叙述一下逆定理.

生：（学生讲述，教师板书.）

逆定理：如果三角形的三边长a、b、c，有

$$a^2+b^2=c^2,$$

那么这个三角形是直角三角形.

师：这里要注意：$a^2+b^2=c^2$ 是已知的三角形三条边所满足的关系式，其中 a、b 是两条较短的边，c 是最长的边，根据这个关系式，我们要证明(判断)这个三角形一定是直角三角形．因此，这个定理的证明是先作一个直角三角形，使两直角边分别等于已知三角形中较短的两边 a、b，应用勾股定理算得斜边，再证两个三角形是全等的．

（学生阅读课本，然后请一位同学在黑板上把这个定理的已知、求证、证明过程写出来．）

已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，且 $a^2+b^2=c^2$．

求证：$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$．

证明　如图9，作$\triangle A'B'C'$，使$\angle C'=\mathrm{Rt}\angle$，$B'C'=a$，$C'A'=b$，那么

$$A'B'^2=a^2+b^2.$$

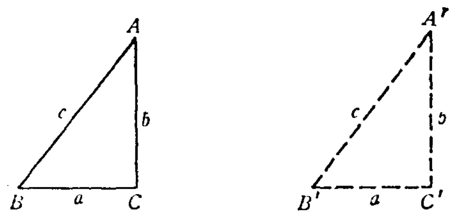


图 9

$\because a^2+b^2=c^2$，　$\therefore A'B'^2=c^2$．

$\because$ 边长是正值，$\therefore A'B'=c$．

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$\because BC=a=B'C'$，$CA=b=C'A'$，$AB=c=A'B'$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$．

$\therefore \angle C=\angle C'=\mathrm{Rt}\angle$．

（板演完毕，引导学生议论，纠正叙述中的语言毛病和不准确的地方．）

师：在证明中要特别注意，作直角三角形时，只能利用条件中

的两条边，证明两个三角形全等时，只能利用一般三角形的全等条件.

五、小　　结

师：同学们，你们通过亲自动手，利用面积割补的证明方法，得出了直角三角形三条边之间的关系，即直角三角形两直角边 a、b 的平方和等于斜边 c 的平方：$a^2+b^2=c^2$. 反之，如果一个三角形三边长 a、b、c 满足这个关系，那么这个三角形一定是直角三角形.

公元前一世纪，我国古代学者在《周髀算经》一书中有用边长为 3、4、5 的直角三角形来进行测量的记载，并把直角三角形的两直角边分别叫做勾和股，斜边叫做弦. 因此，上面两个定理分别叫做勾股定理和它的逆定理.

在外国是古希腊人毕达哥拉斯(公元前 585 年)首先证明这个定理的，所以也把它叫做毕达哥拉斯定理.

六、布 置 作 业

课本习题(略).

教 案 说 明

勾股定理是在学生学习了多边形面积性质和计算公式的基础上提出来的，勾股定理揭示了直角三角形三边之间的数量关系，是直角三角形的一个重要性质.

本课教学的重点是勾股定理及其逆定理. 由于勾股定理的证明方法采用面积割补法，学生不容易想到，因此定理的证明又是教材的难点. 为此，这段教材约需二教时完成，第一教时主要让学生亲自动手，通过对图形的割、补、拼、凑，熟悉面积割补法的证题思

路，在实践中发现直角三角形三边之间的数量关系．第二教时主要是勾股定理及其逆定理的证明．

完成本课教学，要善于启发引导，把动手探究贯串于教学的全过程，引导学生独立地分析问题，发现事实，总结规律．

首先，复习面积的概念，提出用面积割补法探究直角三角形三边之间的关系．这种关系对于学生来说，完全是新的．先从简单的等腰直角三角形着手，得出三边之间的关系式，再验证一般直角三角形三边之间也满足这种关系．整个探索过程都是学生动手动脑，开动各种器官积极思维的过程．这不仅使学生认识了勾股定理，熟悉了面积割补法的证题思路，更重要的是促进学生数学思维的发展，激发学生积极地进行独立的活动．

然后，在观察、分析、综合的基础上，使知识进一步巩固，思维进一步严密，认识进一步深入．有意识地把学生从具体的、直观的直角三角形三边满足的关系，引导到用字母符号表示边长的一般直角三角形三边所满足的关系，归纳成定理的形式并给以严密的证明．

初中学生正值少年时期，具有很大的可塑性，容易兴奋，也容易疲劳，而且脑的“情绪区域”长时间地处于兴奋状态，兴趣就会消失，注意力就会分散．因此，必须把握教学的节奏，一环扣一环，有张有弛，步步深入．要时时注意到学生的感知、思维、注意力和脑力劳动的积极性．我在课堂上，时时注意学生，从学生回答问题，听课的眼神，一举一动中了解他们是懂了或没懂，在发现问题过程中还存在哪些困难，根据课堂的具体情况，在学生不知不觉之中变换启发方式，协助他们克服困难，满怀信心地去发现问题、解决问题．

“面积”在几何解题中的应用

王培甫（河北省教育学院）

作 者 简 历



王培甫　浙江宁波人，1957年毕业于上海复旦大学数学系，同年任河北邯郸14中学数学教师. 1979年被评为河北省中学特级教师，1981年被评为省劳动模范. 现任河北省数学教育研究会副理事长，河北省高师院校数学教育研究会副理事长，河北省教育学院教务处长.

教学目的

要求学生在掌握三角形、四边形等图形面积计算公式的基础上，应用面积的性质（如图形面积的唯一性，图形面积可加性）来发掘图形中各元素之间的关系，从而达到解一类平面几何题的目的.

教学过程

一、导　引

师：前面几课时，我们共同学习了几种几何图形的面积计算公式．例如，三角形的面积等于底与高的乘积之半；平行四边形的面积等于底与高之积；梯形的面积等于上、下底的平均数与高之积等．

除了图形面积的计算公式外，图形面积还有两条性质：

(1) 全等的图形的面积相等(即一个确定图形的面积是唯一的)；

(2) 一个图形的面积等于它的各部分面积的总和．

今天，我们要利用面积公式及性质来论证一些平面几何的题目，你们将会发现，这将是一种很有意思的方法．先举一个最简的例子．

[例 1]　求证：等腰三角形两腰上的高相等．

证明　设 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD、CE 分别为 AC、AB 边上的高(图 1)，则把 AB 看作三角形底，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE;$$

把 AC 看作三角形底，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

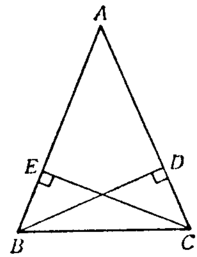


图 1

由于 $\triangle ABC$ 的面积是唯一的．

$\therefore AB\cdot CE=AC\cdot BD.$

$\because AB=AC,\quad \therefore CE=BD.$

从这个简单的例子可以看出，面积的唯一性像一座桥梁把边与高的关系沟通，从而获得了本题的证明．为了进一步学习应用面积相等来证明几何题，我们先来做一些准备工作．

（教师提出问题，让学生讨论，最后教师归纳、小结.）

师：三角形面积之比有如下结论：

(1) 等高（或同高）的两三角形的面积之比等于它们对应底之比. 如图2所示，有

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BD}{DC},\quad \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle FGH}}=\frac{BE}{FG}.$$

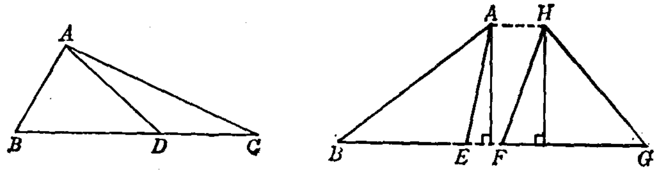


图 2

(2) 一个角相等（或相补）的两三角形的面积之比等于它们对应角两夹边乘积之比. 如图3所示，有

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'C'}}=\frac{AB\cdot AC}{AB'\cdot AC'}.$$

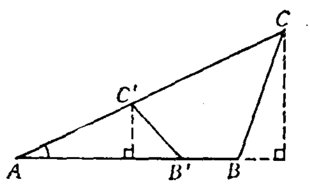


图 3

二、新　　课

师：下面我们来看几个用面积方法证明几何题的例子.

[例 2]　设$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D、E分别是AB、AC的延

长线上的点，连结 DE 交 BC 于 G，且 $BD=CE$（图 4）．求证：$GD=GE$．

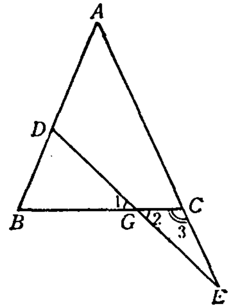


图 4

师：这是一个十分常见的题目，证题方法很多，大都要添加辅助线构成全等图形．现在我们用"面积"来思考，看看能否用面积作媒介来建立所求各量之间的联系．首先看一下线段 BD、CE，它们所在的 $\triangle BGD$、$\triangle GEC$ 有哪些面积比例式可以使用．

生甲：

$$\angle 1=\angle 2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle GBD}}{S_{\triangle GCE}}=\frac{GB\cdot GD}{GE\cdot GC}. \qquad ①$$

师：对！这就是前面所说的三角形面积之比的第二个结论，还有其他结论吗？

生乙：

$$\angle B、\angle 3 \text{ 互补} \Rightarrow \frac{S_{\triangle GBD}}{S_{\triangle GCE}}=\frac{BD\cdot GB}{CE\cdot GC}. \qquad ②$$

师：这样，由 ①、② 相等，进一步可得出什么结论呢？

生丙：

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{GB\cdot GD}{GE\cdot GC}=\dfrac{BD\cdot GB}{CE\cdot GC}\Rightarrow\dfrac{GD}{GE}=\dfrac{BD}{CE}\\ BD=CE\end{array}\right\}\Rightarrow GD=GE.$$

师：好，这种证法没有添加一条辅助线，就把问题解决了！

下面一例请大家仿效着做．

［例 3］ 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的内角平分线（图 5）．求证：

$$AB:AC=BD:DC.$$

（在教师启发下，学生发现四条有关线段所在的两个三角形是 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABD$，而这两个三角形有一个对应角相等，一个对

应角相补，从而可像例 2 一样建立两个面积比例式，最后消去共同元素而获证.）

师：下面我们再来看一个可以作为证题定理的例题.

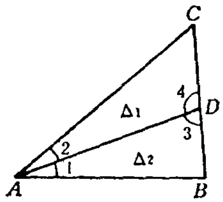


图 5

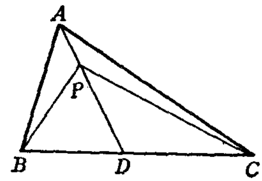


图 6

［例 4］ 设 D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上任一点，P 是 AD 上一点，连结 BP、PC，求证

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BD}{DC}.$$

（本题的证明方法很多，教师可根据学生当时的思维动向去引导，如启发学生看到

$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PBD};$$

$$S_{\triangle ACP}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle PCD}.$$

从而由 $$\frac{S_{\triangle ABD}}{BD}=\frac{S_{\triangle ACD}}{CD},$$

$$\frac{S_{\triangle PBD}}{BD}=\frac{S_{\triangle PCD}}{CD},$$

用比例性质

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\\[2mm]\dfrac{e}{b}=\dfrac{f}{d}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a-e}{b}=\frac{c-f}{d},$$

即可推得 $$\frac{S_{\triangle ABP}}{BD}=\frac{S_{\triangle ACP}}{CD}.$$

当然也可把 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACP$ 看作有共同底边 AP 的两个三角形(图 7)去分析思考.)

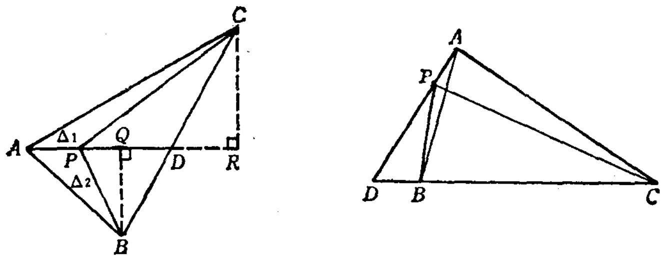


图 7

师：上面例题可以归结为下面的定理：

"若两个三角形有公共底边,则这两个三角形的面积比等于这两个三角形顶点的连线被底边所在的直线分成两线段(内分或外分)之比."

(这个定理对解下面类型的题目十分有用.)

[例 5] 如图 8, D 是 $\triangle ABC$ 的底 BC 的中点, E 是 AD 之中点, 连结 BE 并延长交 AC 于点 F, 求 $AF:FC$ 的值.

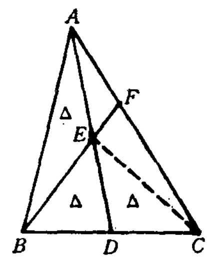


图 8

师：这类题目过去都利用平行投影、比例线段的办法处理. 这里我们用例 4 所表述的定理来解. 为了能构成例4这样的图形, 我们连结 EC, 并设 $S_{\triangle BDE}=\triangle$, 显然立即可看出 $S_{\triangle ABE}=\triangle$, $S_{\triangle EDC}=\triangle$. 所以

$$S_{\triangle ABE}:S_{\triangle CBE}=\triangle:(\triangle+\triangle)=1:2.$$

根据上面定理, 得

$$AF:FC=1:2.$$

现在我出一个类似的题目让大家做.

[例6] 如图9，设 D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边的中点，E 在 AC 上，$AE=2EC$，O 是 AD 与 BE 的交点，求 O 分 AD 与 BE 的比.

本题由学生自己解决．步骤如下：

设 $S_{\triangle BDO}=\triangle$，则 $S_{\triangle ODC}=\triangle$，$S_{\triangle ABO}=4\triangle$，$S_{\triangle AOC}=4\triangle$.

于是 $S_{\triangle AOE}=\frac{8}{3}\triangle$，$S_{\triangle COE}=\frac{4}{3}\triangle$.

从而得 $AO:OD=4:1$，

$$BO:OE=4:\frac{8}{3}=3:2.$$

师：上面几例我们主要是用了“几何图形面积的唯一性”这一性质．下面我们将利用面积的另一个性质：“一个几何图形的面积等于它的各部分面积之和．”请看例题.

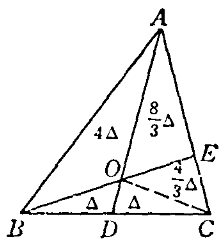


图 9

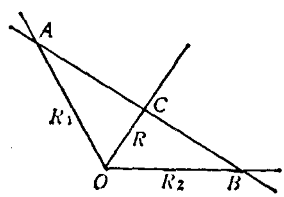


图 10

[例7] 如图10，设 $\angle AOB=120°$，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，一直线分别交 OA、OB、OC 于点 A、B、C．已知 $OA=R_1$，$OB=R_2$，$OC=R$．求证：

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}.$$

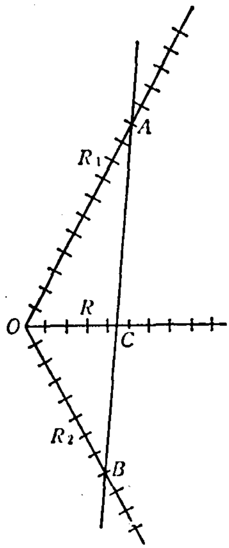
师：本例求证中的有关线段 OA、OB、OC 分散于 $\triangle OAB$、$\triangle OAC$、$\triangle OBC$ 中，而这三个三角形具有两个特征：(1)这三个三角形都存在一个顶角，它们相等或相补；(2) $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$．请大家思考一下，根据这两条我们可以发现 R_1、R_2、R 存

在什么关系呢?

(师生共同活动.)

(1) $\frac{S_{\triangle AOB}}{R_1R_2}=\frac{S_{\triangle AOC}}{R_1R}=\frac{S_{\triangle BOC}}{R_2R}$, 设比值为 t, 则

$$S_{\triangle AOB}=R_1R_2t,$$
$$S_{\triangle COA}=R_1Rt,$$
$$S_{\triangle COB}=RR_2t.$$



电阻并联计算图的设计

图 11

(2) 由 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle COB}$, 得

$$R_1R_2t=R_1Rt+RR_2t,$$

$\therefore$ $R_1R_2=R_1R+R_2R,$

即
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

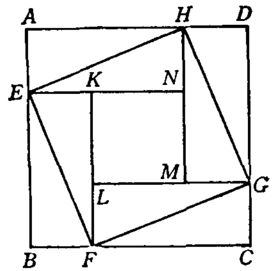


图 12

师: 这个题目在物理学上还很有用呢! 若 R_1 表示一个电阻的阻值, R_2 表示另一个电阻的阻值, 则 R 就是这两个电阻并联后所得电阻的阻值. 在电工计算中常用这个原理设计算图, 叫诺模图(图 11).

用面积方法证几何题, 在我国数学史上早已有光辉的记载. 例如, 三国时代的赵爽用"弦图"证勾股定理就是一例. 请大家看图(图 12): 设 $ABCD$ 是正方形, 且 $AE=BF=CG=DH$, 作矩形 $AENH$、$BFKE$、$CGLF$、$DHMG$, 显然易证, $EFGH$ 为正方形. $\triangle ENH$、$\triangle FKE$、$\triangle GLF$、$\triangle HMG$ 为四个全等的直角三

角形.

设
$$EB=FC=GD=HA=a,$$
$$EK=FL=GM=HN=b,$$
$$EF=FG=GH=HE=c,$$
则在正方形 $EFGH$ 中，由
$$S_{\square EFGH}=4S_{\triangle EFK}+S_{\square LMNK},$$
可得
$$c^2=4\cdot\frac{1}{2}ab+(a-b)^2,$$
即
$$c^2=a^2+b^2.$$
从而证明了著名的勾股定理.

下面这个例题请大家自己动手证明.

[例8] 设 P 是正三角形 ABC 内任意一点，自 P 至 BC、CA、AB 分别引垂线 PQ、PR、PS，求 $PQ+PR+PS$ 是一个定值(图13).

证明 设正三角形 ABC 的边长为 a, 连结 PA、PB、PC,

则
$$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PQ\cdot a,\quad S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}PR\cdot a,$$
$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PS\cdot a,$$
$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(PR+PS+PQ)a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$
$$\therefore PQ+PR+PS=\frac{\sqrt{3}}{2}a\text{(定值)}.$$

师：当然运用面积方法解题也并不都是上面所讲的一、二种模式，有时也要动一番脑筋，作一番探索的.

[例9] 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线，P 是 AD 上任一点，连结 BP、CP，自 C 引 $CE\parallel PB$ 交 AB 的延长线于 E，自 B 引 $BF\parallel PC$ 交 AC 的延长线于 F(图14).

求证：$BE=CF$.

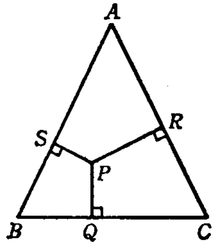


图 13

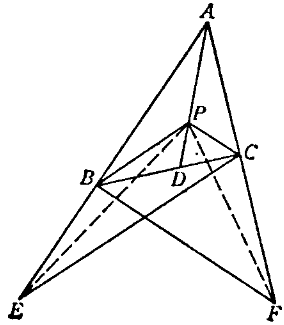


图 14

师：初看 BE、CF 似乎没有一对有面积关联的三角形分别含有它们，但仔细分析已知条件及图形后，发现若连结 PE、PF，根据平行线的性质，则可推得

$$S_{\triangle BEP}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle CFP},$$

即

$$S_{\triangle BEP}=S_{\triangle CFP}.$$

仔细观察 $\triangle BEP$ 及 $\triangle CFP$，它们的公共顶点在 $\angle A$ 的平分线上，而底边 BE、CF 分别在 $\angle A$ 的两边上，故它们的高相等，又它们的面积相等，故其底边必相等，即 $BE=CF$.

从以上例题可以看出，把握住图形面积的两条基本性质，以面积为媒介建立几何图形中各元素间的关系比较简明，且解题中对辅助线的依赖性较小，但仍不失几何证题的逻辑严密性．除了上面例子中证线段成比例、线段相等这些类型的题目外，面积法也可证明线段平行、垂直及其他类型的问题．因此，面积法将是几何解题中很有用的方法．

三、布置作业

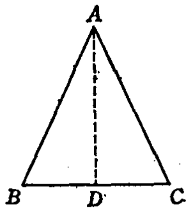
1．求证：三角形的重心分中线成 2:1 两条线段．

2．求证：有两角相等的三角形一定是等腰三角形．(提示：如图添辅助

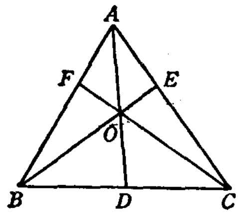
线 AD)

3. 设 O 是 $\triangle ABC$ 内部一点，连结 AO、BO、CO，且分别延长交边 BC、CA、AB 于 D、E、F，求证：

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$



(第 2 题)



(第 3 题)

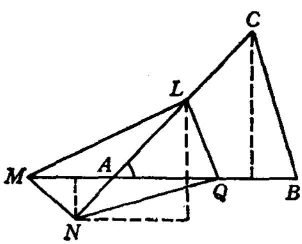
4. 如上题所设，求证：

$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1.$$

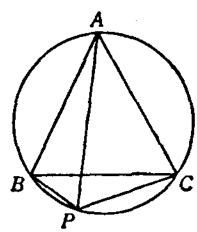
5. 求证：若一个四边形的两条对角线所夹的角等于一个三角形的一个内角或外角，则这个四边形与三角形的面积比等于四边形两条对角线的乘积与三角形这个角的两夹边的乘积之比。

已知：$\triangle ABC$ 与四边形 $LMNQ$ 中，$\angle A=\angle LAQ$.

求证：
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{LMNQ}}=\frac{AB\cdot AC}{LN\cdot MQ}.$$



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 设点 P 是正三角形 ABC 的外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上任一点，连结 PA、PB、PC，设 $AB=a$。

(1) 求证：$PA=PB+PC$;

(2) 求证：$PA^2=a^2+PB\cdot PC$.

(提示：运用题4结论)

教案说明

(1) 在设计本教案时，考虑了两个方面：一是作为初中几何课中面积知识教学的复习，巩固与引伸，让学生已学到的知识深化；二是以两条面积基本性质(公理)为依据，向学生介绍"面积解题法"，使学生掌握一种新的解题思路.

(2) 本教案可以用一个课时讲完，也可分两个课时讲完，可视教师准备让学生掌握到什么深度及学生的现有水平来定，如果有需要，本教案内容尚可进一步深化，把它作为学生课外活动的教学内容.

(3) 讲课时要注意培养学生学习几何的情趣，注意联系实际，注意联系数学的发展史，尤其是我们祖先在这方面的贡献.

凸多边形的内角和

周中棠（辽宁省抚顺二中）

作 者 简 历



周中棠 湖南涟源人，1963年毕业于抚顺二中，同年任抚顺市26中学数学教师．1986年被评为辽宁省高级教师，1989年被评为辽宁省特级教师．1986年获辽宁省模范教师称号，1987年获辽宁省劳动模范称号，1989年获辽宁省有突出贡献专家称号，1990年被数学会奥林匹克委员会授予数学奥林匹克一级教练员称号．现任抚顺二中数学教师，抚顺市数学会理事，辽宁省数学教学研究会理事．

教学目的

(1) 使学生掌握凸 n 边形内角和定理及其推论；能熟练地运用定理求出任意的凸 n 边形的内角和与外角和，并且能根据内角和求出凸多边形的边数．

(2) 通过将凸多边形分割成三角形的方法的探讨，给学生提供一个学习科学分类的思想与方法；通过对凸 n 边形内角和定理的归纳，使学生学习不完全归纳法的思想与方法；通过引导学生编纂习题，培养学生应用知识的能力．

教学过程

一、猜想与说明

师：今天我们学习凸多边形内角和定理，将导出凸 n 边形内角和公式.

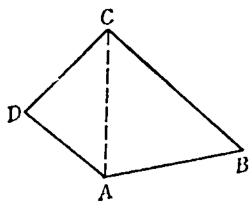
（板书课题.）

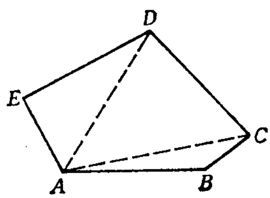
师：为了导出凸 n 边形内角和公式，我们可以从求一些特殊的凸 n 边形的内角和,如三角形、四边形、五边形的内角和着手,以便从中发现规律.

[化一般为特殊,这是对一般性的问题进行化归的一条途径.]

师：请同学们先回忆一下三角形内角和定理的内容，然后再以这个定理为基础,求出凸四边形、凸五边形内角和各是多少度.

（学生各自作图计算,教师巡视.）





生甲：凸四边形 $ABCD$(上左图)的内角和是 $180°\times2=360°$.

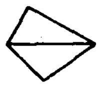
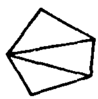
生乙：凸五边形 $ABCDE$(上右图)的内角和是 $180°\times3=540°$.

师：将多边形分割成三角形时，绝大多数同学采用的是从多边形的某一顶点出发，将多边形分割成具有公共顶点的三角形的方法(上图),当然也有少数同学采用教材所用的或其他方法.

[教学时教师要针对学生实际，对教材进行适当处理，使教学过程适应学生的实际思维水平.]

师：根据刚才作图，能否填写下列表格？

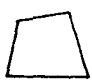
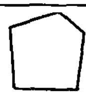
（请同学上黑板填上相应数字.）

凸多边形的边数	图形	分割出的三角形个数	多边形的内角和
3		1	$180°$
4		2	$2\times180°$
5		3	$3\times180°$

师：对于凸 n 边形（n 是大于 2 的正整数），内角和应当是多少？

生：根据凸多边形被分割出的三角形的个数与其边数间的关系，得出凸多边形的内角和.

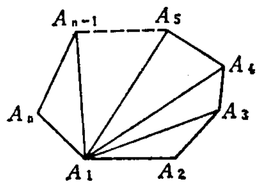
（学生回答，教师填表.）

多边形的边数	图形	分割出的三角形个数	多边形的内角和
3		$3-2=1$	$(3-2)\times180°$
4		$4-2=2$	$(4-2)\times180°$
5		$5-2=3$	$(5-2)\times180°$
……	……	……	……
n		$n-2$	$(n-2)\times180°$

[这里，教师在引导学生学习与运用不完全归纳法归纳凸 n 边形内角和定理时，表格的运用使归纳更富于条理性.]

师：上面得到的凸 n 边形内角和等于 $(n-2)\cdot180°$，这个结论是从三角形、四边形、五边形的内角和与它们边数之间的关系归纳出来的，这只能作为一种猜想. 下面我们设法作出凸 n 边形的一般性图形，并对这个结论的合理性进行说明.

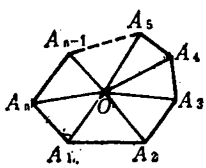
师：表示凸 n 边形的图形应当怎样画呢？我们可以画一般的凸多边形，但其中的一边要用虚线，其余各边均用实线，并用如图的字母 A_1、A_2、…、A_n 来表示. 这就是我们常见的凸 n 边形的画法和表示法(右图).

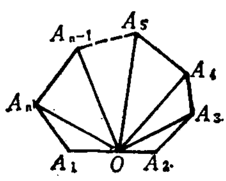


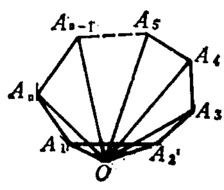
(如何将多边形进行分割？多数同学采取从多边形的一个顶点出发引对角线的分割方法.)

师：除上述分割方法外，是否还有其他分割方法？但要注意为使多边形被分割时，既不出现三角形重叠的现象，也不使多边形有未被分割的部分，分割多边形的那些三角形应具有公共顶点. 这个公共顶点除选在多边形的顶点处，还可选在哪些位置呢？这涉及一个点与多边形的位置关系. 一个点与多边形究竟有哪些位置关系？

[以教学内容为素材，引导学生学习应用科学分类的方法，从而打开学生的思路.]







（学生对多边形进行具体分割，教师巡视，物色有关学生到黑板板书分割方法.）

师：我们已画出了不同的分割方法(上图)，这里将公共顶点选在多边形顶点处和多边形内或多边形外几种情况. 对公共顶点选在多边形内的分割方法，我们可做如下说明：在n边形内任取一点O，连结OA_1、OA_2、OA_3、…、OA_n，这些线段将n边形分成以点O为公共顶点的n个三角形. 由此可得，n边形的内角和等于这n个三角形的内角和减去以点O为顶点的n个角的和，所以n边形的内角和是

$$n\cdot180°-360°=(n-2)\cdot180°,$$

其中n是大于2的正整数.

公共顶点选在多边形内的分割方法使我们直观看出：n边形的内角和等于n个三角形的和减去一个周角.

（由于定理的严格证明需要用数学归纳法，故不用“证明”而用“说明”，对于其他分割方法的说明可留到课外，供学生研究.）

师：对于点O选在n边形外的分割方法，说明如下：n边形的内角和等于$\triangle A_2OA_3$、$\triangle A_3OA_4$、$\triangle A_4OA_5$、…、$\triangle A_{n-1}OA_n$、$\triangle A_nOA_1$这$n-1$个三角形的内角和减去$\triangle A_1OA_2$的内角和，故n边形的内角和等于

$$(n-1)\cdot180°-180°=(n-2)\cdot180°.$$

[上述两种分割方法，一种是学生自发容易想到的，另一种为教材采用，揭示定理的内容比较直观形象.]

二、编题与解题

师：我们已经得到凸n边形的内角和等于$(n-2)\cdot180°$，下面我们围绕这个定理，自编自解一些习题.

请同学们针对n边形内角和公式，给定n一个值，编一道习题.

生：习题1：求凸十二边形的内角和.

（公式是归纳出来的，而习题1是通过演绎的途径编出来的，学生解习题1：$(12-2)\times180^\circ=1800^\circ$ 后，教师再引导学生进行联想，继续编解习题.）

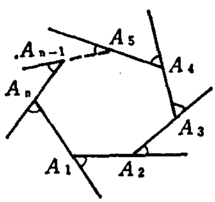
师：多边形不仅有内角，还有它的外角．多边形任意一个内角的邻补角都是它的外角．请同学们就多边形外角和编一道习题.

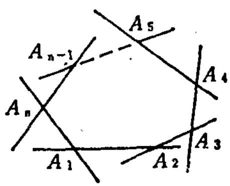
（学生思考议论，然后口述编出的题目.）

生：习题2：求十边形的外角和.

（习题2解：$10\times180^\circ-(10-2)\times180^\circ=360^\circ$．它是通过想事物的反面这条途径编出来的.）

师：题目可改为一般形式，求凸 n 边形的外角和．同学们可以先作出 n 边形的相应外角，然后再考虑求其和.





（教师通过巡视，叫学生板书作出的正（上左图）、误（上右图）两个方面的图形．教师针对图形，引导学生概括出多边形外角和定义，进而推导出多边形的外角和，从而完成推论1的教学.）

师：三角形的外角和是多少度？

四边形的外角和是多少度？……

多边形的外角和随边数的不同而变化吗？

[通过提问，使学生对推论1的印象更加清晰明了.]

师：（手指向习题1）同学们，能不能对习题1进行逆向思考，编一道习题.

生：习题3：(1) 已知一个多边形的内角和是1080°，求凸多边形的边数.

(2) 已知一个多边形的内角和是1000°，求多边形的边数.

(这是通过逆向思维的途径编的习题.学生解答后，教师强调：求出的n是大于2的正整数时，问题才有解.)

师：(手指向习题1和习题2) 下面，我们将n边形的内角和与外角和综合起来，编一道习题.

习题4(即教材例1)：已知一个多边形，它的内角和等于外角和的两倍，求这个多边形的边数.

(这是通过综合的途径编纂的习题. 学生解答后，教师就上述自编题目的思考方法做如下小结.)

师：我们学了一个公式或定理之后，可以通过类似上述一些途径进行联想，自己编一些习题. 比如可以想一想，问题有哪些特例？还能否推广？它的反面情形如何？逆向思考结果怎样？与其相关的某些知识有哪些异同点？与其相关的问题综合起来情形如何？我们可以通过上述一些途径主动提出与解决问题，这对增强学习的主动性，增强提出问题与解决问题的能力都大有益处.

[重视思维方法的教学、注意开拓学生的思维，这对提高学生的思维素质，极为有益.]

三、阅读与练习

学生阅读教材(阅读定理及其推论1、推论2和例2，重点阅读推论2及例2). 阅读后学生归纳本节课学习的内容.

形成性练习：学生阅读思考教材中本课时的练习，然后口答解题思路.

四、小　结

师：这节课我们学习了凸n边形的内角和定理：凸n边形的

内角和等于 $(n-2)\cdot180°$ 及其两个推论，其基本依据是三角形的三个内角和为 180°. 在定理的推导过程中，在研究点与多边形的位置关系时，涉及到了分类的思想与方法；在由三角形、四边形、五边形的内角和想象 n 边形的内角和时，应用了由特殊到一般的归纳的思想与方法；在依据定理编习题时，我们进行了联想，而"一般与特殊"，"正面与反面"，"综合与分解"等都是我们进行联想的一些途径. 这节课要求我们能熟练地运用定理及其推论求出一个任意的凸 n 边形的内角和与外角和，并能由内角和求出凸多边形的边数.

五、作　业

课本习题(略).

自我评述

(1)　教学要注意学生的学习心理因素. 因为大纲、教材和学生实际都是教学的基本依据. 只有全面地挖掘教学依据，才能充分发挥教学的整体功能. 这节课在说明凸多边形内角和定理的合理性时，在重视教材所采用的分割方法的同时，也高度重视了学生所采用的方法. 这就使教学顺应了学生的认识过程，有利于调动学生思维的积极性，也有利于激发学生内在的思维潜力. 教学实践证明，只有针对学生的学习心理进行教学，教学才能做到有的放矢，从而做到教与学的充分和谐，才能有效地提高教学质量.

(2)　在传授知识的同时，一定要重视学科基本思想方法的教学，重视对学生进行科学的思维方法的训练. 在这节课的教学中，我引导学生学习与运用了归纳、演绎、科学分类等数学方法，引导学生从不同角度进行联想，自编自解习题，这些都是出于培养学生思维能力的目的，对教学过程有意识的设计. 倘若在教学中长期

坚持对学生进行科学的思维训练，这对于培养学生良好的思维素质，使教学富于后劲，是大有益处的.

(3) 课堂教学要贯彻形成性教学的原则. 所谓形成，是指对所学的知识一是要形成认识；二是要形成技能. 形成认识，不仅要把握各个部分的知识点，而且还要把握住知识的整体，对知识的整体精神要力争做到一想就知道，并能用比较简明的语言阐述出来. 只有这样，对问题才能看得比较透. 形成技能，主要靠练，而且还必须练到一定量. 为此，课堂教学必须贯彻练习为主线的原则. 在练习中进一步理解知识，提高认识水平和思想水平，在练习中形成比较熟练的技能技巧.

三角形内角平分线性质

顾泠沅 （上海市青浦县教师进修学校）
吴定一 （上海市青浦县实验中学）

作 者 简 历



顾泠沅



吴定一

顾泠沅 江苏吴江人，1968年毕业于上海复旦大学数学系，翌年任上海青浦县莲盛中学数学教师，1972年任青浦县教师进修学校教研室数学教研员．1983年获上海市“五讲四美”为人师表先进教育工作者称号，1985年获上海市优秀教育工作者称号，并获上海市首届文汇园丁奖，1986年被评为上海市中学特级教师，获上海市劳动模范称号，中华全国总工会授予全国优秀教育工作者称号和“五一”劳动奖章，1988年被评为上海市中学高级教师，获上海市劳动模范称号，1989年中华人民共和国国务院授予全国先进工作者称号，研究成果获国家教育委员会颁发的全国教育科学优秀论文一等奖．现任上海市青浦县教师进修学校校长，中国教育学会常务理事、学术委员，全国教育科学规划领导小组成员，中

央教育科学研究所兼职研究员，中国教育学会中小学数学教学研究会副理事长，以及上海市哲学社会科学学会联合会委员等职.

吴定一 江苏苏州人，1952年毕业于苏南文化教育学院数专科，同年任上海市青浦县青浦中学数学教师．1987年被评为上海市中学高级教师，1989年获上海市先进教育工作者称号．现任青浦县实验中学数学教师，教导主任，青浦县数学会理事长，《数理天地》杂志编委.

教学目的

(1) 使学生理解三角形内角平分线的性质定理；初步掌握这个定理的应用.

(2) 通过对问题的探索、变式，进一步培养学生分析问题、解决问题的能力.

教学过程

一、承上启下，创设问题情境

师：请同学们回忆一下以往学的平行线分线段成比例定理和它的推论．谁来讲这条定理？

生：三条平行线截两条直线，截得的四条线段对应成比例.

(教师画出图1，请学生根据图1用式子表示上述定理和推论．根据一名学生的回答，教师板书.)

如图1，
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},\quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\quad \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}.$$

师：很好！这说明平行线可以分线段成比例．大家想一想，除

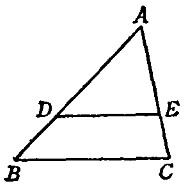


图 1

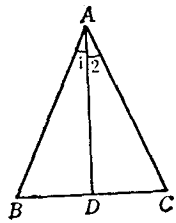


图 2

了平行线之外，是不是还有其他的几何图形能够获得成比例的线段呢？这里有一个等腰三角形 ABC(图 2)，AD 是它的顶角平分线．从比的角度上讲 $AB:AC=1:1$，$BD:DC=1:1$．显然，等腰三角形顶角的平分线可以分线段与已给两线段成比例．那么对一般三角形来讲，它的内角平分线是否也具备同样的性质呢？这就是今天要研究的课题：三角形的内角平分线能不能分线段与已给两线段成比例？

（学生若有所思，却还无从下手．教师随即布置若干讨论题，作进一步的引导．）

师：第一，请大家在等腰三角形的基础上，延长一条边，使 AB 与 AC 满足一定的比值，然后看一看这时 $\angle A$ 的平分线使BD与DC之比起怎样的变化？能不能获得成比例线段？第二，在这个例子的启发下，猜想一下，一般三角形内角平分线会有什么性质？请同学们先画图，后想想，看谁能够比较快地得到这个问题的结论．

（学生画图思考，教师巡视，并作进一步引导．如你为什么这样想？能不能证明？有没有别的添辅助线的方法？等等．约经三分钟左右，大部分学生都有了满意的结果．）

[过去我们上这节课，往往用演绎讲解的方式进行，先讲出三角形内角平分线的性质定理，然后逐步证明．这次上课不是这样，我们从平行线能分线段成比例开始，然后提问学生，还有别的什么

几何图形能获得成比例线段？这样，一开始就激起了学生探究新知识的兴趣，揭示了本课的探究宗旨．当然这个问题提得比较笼统，选择余地太大，考虑到初中学生的认识特点，我们事先削减了选择支，规定本课尝试探究的方向为三角形的内角平分线，能不能分线段与已给两线段成比例？由于拟订了适合学生实际水平的尝试层次，因此课堂上学生参与探究活动的气氛既紧张又热烈，取得了较好的教学效果．]

二、在试探和议论中发现新知识

师：谁来说一说自己的做法和想法？

生甲：如图 3，在等腰三角形 AEC 中，我先延长一边 AE 至 B，使 $AB:AC=2:1$，这时 $BD:DC=2:1$，它们的比值相等．

生乙：我也延长一边 AE 至 B，使 $AB:AC=3:1$，我想可能有结论：$AB:AC=BD:DC$．

师：请一位同学证明 $AB:AC=2:1$ 时的情况．

生丙：过 E 作 AD 的平行线交 BC 于 G．

$$\because EG \parallel AD,\ AE=EB,\ \therefore BG=GD.$$

又 $\because F$ 是 EC 的中点，$EG \parallel FD$，

$$\therefore \qquad GD=DC,\quad \therefore \frac{BD}{DC}=\frac{2}{1}.$$

师：这位同学的办法很好，他利用原来的等腰三角形 AEC，又在 $\triangle ABC$ 的内部通过添平行线 EG 的方法，根据过去学过的平行线等分线段定理证得结论．大家再想一想，能不能在三角形的外部添平行线，同样证得结论？

生丁：如图 4，在三角形 ABC 中，过 C 作 AD 的平行线交 BA 的延长线于 E，因为 $EC \parallel AD$，所以 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，由于 $\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 3=\angle 4$，于是 $\triangle ACE$ 是等腰三角形，$AC=$

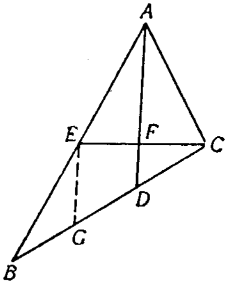


图 3

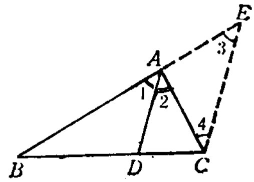


图 4

AE. 再利用平行线分线段成比例定理，得到 $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}$，也就是 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

师：对！同学们比较一下，两种证法哪一种比较好？

生众：第二种好！

师：为什么？

生：第一种方法比较烦琐，而且只证了特殊比的情况；第二种方法能证一般情况.

（全班学生感到第二种证法既简洁又解决了一般问题，人人面露喜色. 此时教师要求学生丁讲一讲他是怎样想出这种方法来的，从中启发学生在学习新知识时要紧密联系已经学过的有关知识.）

师：请学生丁说一说证明步骤.

（教师把详细过程写在黑板上.）

已知：$\triangle ABC$ 中 AD 平分 $\angle A$ 交 BC 于 D,

求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

证明：过 C 作 AD 的平行线交 BA 的延长线于 E,

(1) $\because AD$ 平分 $\angle A$, $\therefore \angle 1=\angle 2$. $\because AD /\!/ EC$, $\therefore \angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$. $\therefore \angle 3=\angle 4$, $AC=AE$.

(2) $\because AD /\!/ EC$, $\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AE}$.

由(1), (2)得 $$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

师：由此可见,三角形的内角平分线确实能够分线段成比例,这就是今天要学习的三角形内角平分线的性质. 下面请同学们再动动笔,把这个性质准确地写出来.

(学生试写约两分钟,教师组织学生进行小结.)

师：大家交流一下,怎么叙述性质定理.

生甲：三角形的两边与它们夹角的平分线所截得的第三边的两条线段对应成比例.

生乙：三角形中一个角的平分线截它的对边所得的两条线段和另外两边对应成比例.

生丙：……

(教师指出学生叙述中的语病和不准确的地方,然后要求全班学生阅读书本上的叙述:

"三角形的内角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例.")

师：书本上的叙述,用词确切、语句精练. 今后我们叙述数学命题时,不仅要注意科学性,还要注意语言的准确和精练.

[通过对具体几何图形的考察,可以促使学生去猜想和发现角平分线性质定理,这样做有利于发挥学生学习的主动性,发展他们的创造性,改变以往那种被动的、单纯听讲的学习方法. 数学教学不仅要重视演绎,还要重视探索知识的过程,并把这个过程介绍给学生. 特别要让学生自己去进行归纳、类比、联想和论证,逐步通过试探或试验来获得新知识. 另外,角平分线性质定理的证明,需在

三角形外部添置辅助线，这有一定难度，但通过对内容的加工组织，从特殊到一般，从有一定基础的内部添线引导到尚未接触过的外部添线，教学效果比较好.]

三、通过变式练习促进深化

师：下面，我们一起做练习.

在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle A$交BC于D，$AB=9$ cm，$BC=10$ cm，$AC=6$ cm，求BD及DC的长.

生：因为AD平分$\angle A$，根据今天学的性质定理得到$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$. 设$BD$为$x$ cm，那么DC为$(10-x)$cm，根据条件得方程$\frac{9}{6}=\frac{x}{10-x}$，解得$x=6$，可知$BD=6$ cm，$DC=4$ cm.

师：不列方程可以做吗？

生：可以的. 由$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，用合比定理得$\frac{(AB+AC)}{AC}=\frac{BC}{DC}$也可以解.

师：若在$\triangle ABC$中加一条角平分线，我们能否获得点新的结果呢？如图5，若在上题$\triangle ABC$中，添加一条$\angle C$的平分线交AB于E、交AD于F，可以得到哪些比例式？

（学生在图上比划，独立思考，完成以后，同桌的学生相互交流解题结果，共得出四个不同的比例式：

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC},\quad \frac{AC}{BC}=\frac{AE}{EB},$$
$$\frac{AC}{DC}=\frac{AF}{FD},\quad \frac{AE}{AC}=\frac{EF}{FC}.）$$

师：根据上题的已知条件，请同学们编拟一些计算题.

生(众)：求AE、EB的长；求AF、FD的长；求EF、FC的长.

师：下面讨论一下，可不可以求出这些线段的长？

（学生仔细一分析，认为 AE、EB 的长容易求出，另外的几条线段由于暂时还不会算出 AD 与 CE 的长，所以无法求出它们的长度，但学生认为可改编为求 AF 与 FD、EF 与 FC 的比值.）

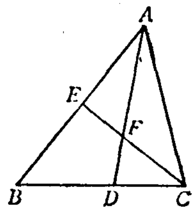


图 5

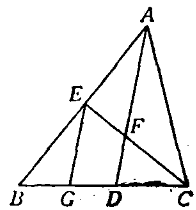


图 6

师：好！如果我们再添加一条辅助线，能否得到更多的结果呢？如图 6，若在上题中，过 E 作 AD 的平行线交 BC 边于 G，根据前一题的已知条件，能不能求出 BG、GC 的长？

（学生对此类思考议论题很感兴趣. 他们根据前面已经算得的 $BD=6\text{cm}$，$DC=4\text{cm}$ 及 $\frac{AE}{EB}=\frac{3}{5}$ 等结果，再利用 $EG \parallel AD$，$\frac{BG}{GD}=\frac{EB}{AE}$，很快得出正确的答案.）

[这里的练习采用变题、编题等逐渐递进的办法，力图以学生的实际水平为基础，使练习题在思考性方面有合适的坡度，逐步增加创造性因素. 经常做这类精心安排好的练习，可使学生对题型与图形结构有较全面的理解，学会举一反三. 此外，在变式练习中，教师通过课堂巡视、交谈、提问、分析等手段，可随时搜集与评定学生的学习情况，以便及时反馈调节，加强教学的针对性，提高课堂的教学效率. 正如古人所说的，"学然后知不足；教然后知困. 知不足，然后能自反也；知困，然后能自强也".]

四、把新知识纳入整体结构中去

师：这节课，第一，我们通过观察、猜想和论证得出了三角形内角平分线的性质："三角形的内角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例"；第二，这条性质定理在解题时有广泛的应用，这节课我们只是作了一些初步的练习；第三，到现在为止，我们掌握了两条可以获得成比例线段的定理：一是平行线分线段成比例定理；二是三角形内角平分线性质．从图上看(图7)，左图是平行线截得四条线段；右图是角平分线分对边成比例线段．证明的时候，我们把 AC 转到 AE 的位置，$AD\parallel EC$，得到的图形与左图完全相同．所以，角平分线性质定理可以直接从这条平行线性质定理推导出来，学生丁在这节课上就是这样来证明角平分线性质定理的．

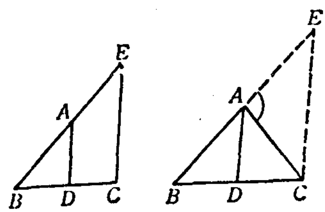


图 7

［最后的小结既点出了性质定理的重要性，又采用了首末呼应的教学手法，把新知识视为平行线分线段成比例定理的推演．教师应当帮助学生掌握不同知识结论在整体中的相互关系以及在知识结构上的统一性，从而使之纳入整个教材所建立起来的知识系统中去．这样做，利于学生对知识的理解和巩固，同时，也使整节课连贯、紧凑，重点突出．］

五、布置作业

课本练习和习题(略)．

直角三角形中的成比例线段

丁鹏云（辽宁省实验中学）

作者简历



丁鹏云　吉林市人，1953年毕业于东北师范大学数学专修科，同年任东北实验学校数学教师．1986年先后被评为辽宁省中学特级教师、高级教师．1984年被评为辽宁省“劳动模范”，1985年被评为辽宁省“三八红旗手”、“女改革先进分子”．现任东北三省数学教育学会理事，1988年7月退休．

教学目的

(1) 使学生掌握直角三角形中的成比例线段定理——射影定理及其证明．

(2) 通过定理的证明和应用，发展学生的思维能力．

教学过程

一、复习提问

师：（在黑板上画出直角三角形 ABC，$\angle C=90°$，如图1.）

请同学们考虑下面三个问题：

(1) AB 在 AC 上的射影是什么？(线段 AC)

(2) BC 在 AC 上的射影是什么？(点 C)

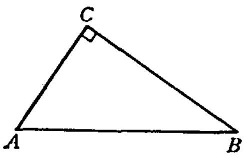


图 1

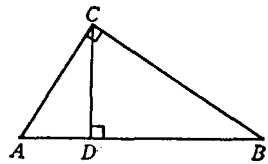


图 2

(3) AC、BC 在 AB 上的射影是什么？

(画出 AB 边上的高 CD，所求的射影是 AD、BD，如图 2. 教师重复 AD、BD 这两条线段的名称.)

师：这样，Rt$\triangle ABC$ 中的六条线段就都有了名称. 它们分别是：两条直角边(AC、BC)，斜边(AB)，斜边上的高(CD)，两条直角边在斜边上的射影(AD、BD).

(复习射影的概念，为教学下面的射影定理作准备.)

二、讲解新课

师：今天，我们来探究直角三角形中这六条线段之间的比例关系，首先要考虑它们是否存在比例关系.

生：根据直角三角形之间相似关系，估计这六条线段之间存在着比例关系.

师：很好！下面我再提出一个问题，请大家考虑.

问题 1 在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边上的高，指出其中的相似三角形，并列出线段间的比例式，哪些比例式中带有比例中项？

(学生在独立思考的基础上相互研究交流，教师巡视辅导，请学生板演.)

生：
$$\triangle ACD\backsim\triangle CBD\Rightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD};$$
$$\triangle ACD\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC};$$
$$\triangle BCD\backsim\triangle BAC\Rightarrow\frac{BC}{BA}=\frac{BD}{BC}.$$

师：图形中共有多少对相似三角形？

生：三对.

师：能列出多少个比例式？

生：九个.

师：黑板上写出三个带有比例中项的比例式，像这样的带有比例中项的比例式，图形中还有没有？

生：没有了.（在教师启发下）因为在相似三角形中，含有比例中项的比例式，必须含有相似三角形的公共边，而图形中只有三组三角形两两相似，而每对相似三角形又只有一组对应边是公共边，所以只有这三个比例式中带有比例中项.

师：很好. 上面的三个比例式，又可以写成
$$\triangle ACD\backsim\triangle CBD\Rightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}\Rightarrow CD^2=AD\cdot BD;$$
$$\triangle ACD\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AC^2=AD\cdot AB;$$
$$\triangle BCD\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{BC}{BA}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow BC^2=BD\cdot AB.$$

这样的写法突出了比例中项，使人一看便知，CD 是 AD 与 BD 的比例中项；AC 是 AD 与 AB 的比例中项；BC 是 BD 与 AB 的比例中项. 请同学们考虑一下，如何用图形中各条线段的名称来叙述这些等式？

生：直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项；每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项.

(教师把定理的命题写在黑板上,并明确这就是今天要学的射影定理.)

师:下面,我们分析一下这个定理的证明思路.欲证 $AC^2=AD\cdot AB$,即证明

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}\left(\text{或}\ \frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}\quad \text{或}\ \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}\right)$$

即要证明两个三角形相似.证明哪两个三角形相似呢?

生:证明 $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

师:能证明这两个三角形相似吗?

生:能!这两个三角形中,有一个公共角($\angle CAD=\angle BAC$),且 $\angle ADC=\angle ACB=90°$.

师:好!我们简单小结一下证题思路.先把四个线段的乘积式改为比例式,然后从比例式找出相应的相似三角形.本题就是从证 $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$ 着手,从而推出 $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$,即

$$AC^2=AD\cdot AB. \quad ①$$

同样,应用三角形的相似关系也可证明:

$$BC^2=BD\cdot AB; \quad ②$$

$$CD^2=AD\cdot BD. \quad ③$$

结论 ②、③,请同学们课外证明一下,写在练习本上.

结论 ①、②、③ 怎样用语言表达一下?

生甲:结论 ①、② 都可以这样说,直角三角形中,每一直角边都是这一边在斜线上的射影与斜边的比例中项.

生乙:结论 ③ 可以这样说,直角三角形中,斜边上的高是两直角边在斜边上的射影的比例中项.

师:对!这些结论我们都称它为射影定理.

[再次强调证明定理的思路与规律,引导学生分析思考,有利于培养学生的思维能力.]

师：在有关直角三角形的问题中，无论是证明题、计算题和作图题，凡涉及到比例中项的，常常要用到射影定理.

请同学们阅读课本上定理的命题与证明.

[充分发挥课本作用，熟记定理内容，掌握证题的书写格式.]

三、应用举例

师：下面，我们应用射影定理来解题.

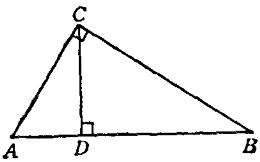


图 3

[例 1] 如图 3，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，CD 是 AB 上的高.

(1) 求证：$\dfrac{AC^2}{BC^2}=\dfrac{AD}{BD}$；

(2) 求 $AC^2+BC^2=?$

(3) 已知 $AD=4$，$BD=9$，求CD、AC.

师：先解第(1)小题.

生甲：由射影定理，直接可得

$$\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AD\cdot AB}{BD\cdot AB}=\frac{AD}{BD}.$$

师：再解第(2)小题.

生乙：应用射影定理，得

$$\begin{aligned}AC^2+BC^2&=AD\cdot AB+BD\cdot AB\\&=(AD+BD)\cdot AB\\&=AB^2.\end{aligned}$$

师：由上可见，利用射影定理可以证明勾股定理. 过去我们是用面积割补的方法证明勾股定理的，现在我们又学会了用射影定理证明勾股定理，同学们要记住这个证法. 接下来考虑第(3)小题.

生丁：由射影定理，得

$$CD^2=AD\cdot BD=4\times 9=36.$$

因为边长为正值，所以 $CD=6$.

$$AC^2=AD\cdot AB=4\times(4+9)=52,$$

$$\therefore \quad AC=2\sqrt{13}.$$

师：这题(指上面第(3)小题)除了求出 CD、AC 外，还可以求什么？

生：还可以求 BC、AB，以及三角形 ABC 的面积.

师：怎么求 BC？

生甲：根据射影定理 $BC^2=BD\cdot AB$，已知 BD、AB，就可求 BC.

生乙：由于已知 CD、BD，因此，也可用勾股定理 $BC^2=CD^2+BD^2$ 来求 BC.

四、课堂练习

师：我们先做下面的练习：

在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，a、b、c 分别表示三边的长，h 表示 AB 边上的高 CD 的长，p、q 分别表示 AD 与 DB 的长(图4).

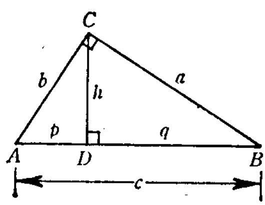


图 4

(1) 若 $a=15$, $c=25$, 求 q、h;

(2) 若 $a=5$, $h=4$, 求 q、p.

(学生在练习本上练习，教师巡视，并组织同学之间相互交流、讨论.)

师：请两位同学来说说他的答案.

生甲：第(1)小题，$q=9$, $h=12$.

生乙：第(2)小题，$q=3$, $p=\frac{16}{3}$.

师：有没有不同的答案？

生：没有.

师：好. 那么，第(1)小题的 q 是用什么方法求的？

生：利用射影定理，通过关系式 $a^2=qc$ 求的.

师：第(2)小题的 q 是用什么方法求的？

生：利用勾股定理求的.

师：第(2)小题的 p 是用什么方法求的？

生：利用射影定理求的.

师：好！这就是说在有关直角三角形的这六条线段的计算中，根据不同的条件可选用射影定理或勾股定理来进行计算.

问题 2 在图 4 中，a、b、c、h、p、q 这六条线段，已知其中任意两条线段是否能求出其余的四条线段呢？有没有不能求出的？每个同学先独立思考，并在练习本上列表写出，利用某两条已知线段，求其他线段的方法，同学之间可以相互研究交流，特别要考虑已知 a、p 或 h、c 时的情况.

[让学生在解题难点上，探索思考，研究分析，给学生创设情境，使学生在心理活动中处于积极状态，有利于学生创造能力的培养.]

师：已知 a、p，求 b、c、h、q.

如图 4 所示，b、c、h、q 怎样求呢？

生甲：因为 $q=c-p$，由射影定理，得 $a^2=c(c-p)$. 解这个关于 c 的一元二次方程，可求出 c，然后就可求出其余线段 q、h、b.

生乙：如果用 $q+p$ 表示 c，有 $c=q+p$. 由射影定理，得 $a^2=(q+p)q$. 解这个关于 q 的一元二次方程，求出 q，然后再求 c、h、b.

师：很好！这两种办法都对，都抓住了射影定理的应用这一个关键点. 已知线段 a、p，求其余四条线段的问题解决以后，已知线段 h、c，求其余四条线段的问题也就比较容易了，谁能回答？

（请一名中等水平的学生回答.）

生丙：因为 $p=c-q$，由射影定理，得$h^2=q(c-q)$. 解这个关于 q 的一元二次方程，求出 q，然后也可求出其余的三条线段.

师：在直角三角形的六条线段中，应用射影定理、勾股定理等，可从任意给出两条线段，求出其余四条线段的问题，同学们课外自己还可以去试一试.

五、小 结

师：这节课，我们主要探讨了直角三角形中成比例线段定理——射影定理的证明及其初步应用. 如图 5，有

$$h^2=pq,\quad b^2=pc,$$
$$a^2=qc,\quad hc=ab,$$
$$a^2+b^2=c^2,\quad \frac{a^2}{b^2}=\frac{q}{p}.$$

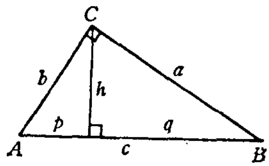


图 5

我们不仅要记住定理，而且还要掌握它们的证明方法. 同学们还记得有关直角三角形线段之间关系的其他定理吗？

生乙：直角三角形的斜边中线定理——斜边上的中线等于斜边的一半.

师：总之，同学们应当灵活地运用这些定理来解有关直角三角形的问题.

六、布置作业

1. 如图 4，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$.

(1) 说出线段 a、b、c、p、q、h 的名称；

(2) 列出这些线段之间的各种关系式.

2. CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的高. 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $CD=h$, $AD=q$, $DB=p$.

(1) 已知 $c=29$, $p=4$, 求 h、b;

(2) 已知 $a=5$, $h=4$, 求 p、q;

(3) 已知 $a=10$, $p=6$, 求 q、b;

(4) 已知 $p=4$, $h=10$, 求 a、b.

3. 仿照第2题编出类似的小题(给出的已知线段不能重复).

自我评述

1. 教学目的的确定

射影定理是几何中重要的定理,讲课时为了突出定理的教学,在教材的处理上,我把有关射影概念问题提在前一课时讲完. 因此,本节课的教学目的就是以射影定理为中心来确定. 一是让学生掌握好射影定理的证明和初步应用;二是通过定理的学习,从中发展学生的智力和培养学生的能力.

2. 教学方法的选择

为了发展学生的智力和培养学生的能力,本节课我选用"研究法"教学. (研究法:就是在课堂教学中教师依据具体教学内容,遵照教学目的,结合学生情况,提出富有思考性的研究题目和要求,先由学生个人独立思考,然后学生间互相讨论研究,得出初步的认识、理解、判断和概括,再由教师归纳、总结、讲授正确答案,纠正错误意见,提高认识水平,完成教学过程的教学方法. 概括起来,"研究法"的结构和程序是:教师提出问题⟶学生独立思考⟶互相研究⟶回答教师的问题⟶教师总结提高.)由于是新课,研究题目就要围绕学生深入理解和掌握新知识,培养基本能力来确定研究的内容.我确定本课的研究的重点有两个:一是射影定理的推导和证明,让学生从直角三角形成比例的线段中归纳出三个带比例中项的比例式,由学生自己总结归纳出射影定理;二是定理的应用,使学生在解直角三角形中能灵活运用射影定理和勾股定

理解有关问题．因此，我提出了“在 Rt△ABC 中，已知线段 a、b、c、h、p、q 中任意两条线段的长度能否求其余四条线段的长度”的问题，从而提高学生的解题能力．

3．教案结构

(1) 复习射影概念为学新课作准备．

(2) 新课．研究问题→归纳出射影定理→分析定理的证明．

(3) 练习、证明题→得出勾股定理的又一证法．

计算题→研究问题(突破计算中的难点)→得出在直角三角形的六条线段中已知任意两条线段的长度，应用射影定理和勾股定理都可求出其余四条线段的长度的结论．

(4) 总结归纳在直角三角形中学过的有关定理．

(5) 作业．

4．培养学生能力的体会

(1) 教师对培养学生能力的问题要有正确的认识和足够的重视．比如射影定理在课本中所占的篇幅很小，学生又易于接受，如果作为单纯知识的传授，此定理和例题用不了几分钟就可解决问题，但这样学生只能学到定理的结论和简单的证明，却掌握不了知识的内在联系，更达不到发展学生的思维能力．

(2) 培养能力同样需要结合大纲钻研教材，认真备课．能力的培养，教材中没有明确的题目，需要教者去挖掘．比如，本节课内容简单，开始我想用“研究法”教学也没有什么可研究的，但经过反复思考琢磨教材，觉得在发展学生思维能力方面还是有文章可做的．于是定出了两个思考题让学生进行思考和研究，从中开阔学生的视野，锻炼学生的思维，使学生不仅学会知识，同时还能学到掌握知识的规律和方法，把知识学活，从而真正发展学生的智力，培养学生的能力．

相似三角形的性质

袁乃超（黑龙江省哈尔滨市第 153 中学）

作 者 简 历



袁乃超 黑龙江哈尔滨人，1968 年在哈尔滨市第 26 中学初中毕业，1987 年哈尔滨师范大学数学函授本科毕业，1988 年、1989 年先后被评为黑龙江省中学高级教师和特级教师. 1985 年获“五一”劳动奖章，1986 年被评为全国教育系统劳动模范，1989 年获全国先进工作者称号. 现任哈尔滨市第 153 中学数学教师、数学教研组长，东北地区数学教育研究会理事.

教学目的

(1) 使学生掌握相似三角形的性质定理及其证明方法.

(2) 能运用性质定理解一些较简单的题目，培养学生严谨的作风和勇于创造的精神.

教学过程

一、复习引入

师：我们学过了全等三角形的有关知识，同学们回忆一下，全

等三角形有哪些性质?

(出示小黑板.)

填写下列各空格. 全等三角形的性质:

对应角____; 对应边____; 对应高、对应中线、对应角平分线____; 周长____; 面积____.

(学生说出应填内容,教师填写.)

师: 全等三角形的性质可以概括为一句话: 全等三角形的对应元素分别相等. 我们知道, 全等三角形是相似三角形的特殊情况,那么一般的相似三角形该具有怎样的性质呢?这是本节课所要研究的问题.

(板书课题: 相似三角形的性质.)

二、讲授新课

师: 我们仍然从相似三角形的对应角、对应边、对应高、对应中线、对应角平分线、周长、面积这几方面来进行研究.

(教师边画图 1, 边板书.)

师: 已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, 相似比为 k. 它们的对应元素怎样?

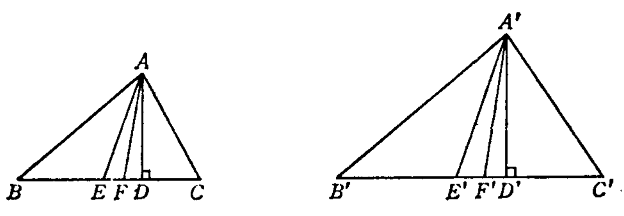


图 1

[从全等到相似, 由特殊到一般, 把学生引入到新知识的探讨中去,这样不仅引入自然,而且有利于发展学生的思维.]

(学生根据已学过的相似三角形的定义, 很容易说出: 相似三

角形对应角相等，对应边成比例．根据学生的回答，教师板书：对应角相等，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$；对应边成比例：$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k$．板书位置与全等三角形的相应性质的板书对齐，以便对比．）

师：那么相似三角形的对应高、对应中线、对应角平分线又有怎样的关系呢？从三角形全等到三角形相似，它们的对应边（一种对应线段）从相等变成了对应成比例，那么其他的对应线段，如对应高、对应中线、对应角平分线是否也从相等变成了成比例了呢？

[让学生在类比中，认识事物的性质.]

生：是的．当两个三角形从全等变为相似时，这两个三角形中对应的高、中线、角平分线都从相等变为成比例．它们的比也等于相似比，因为它们也是相似三角形的对应线段．

师：这一结论是否正确，需要证明才能肯定．请同学们在练习本上试证，每个同学选择某一种证明，同桌的同学最好不要证明同一种．

（证完后，前后桌的同学互相交流证明过程，教师巡视，辅导．）

师：我请一个同学说一下他的思考方法和证明过程，最好以证“相似三角形对应高的比等于相似比”为例介绍一下他对问题的分析过程．

生甲：分析：要证 $\frac{AD}{A'D'}=k=\frac{AB}{A'B'}$，只需证这四条线段所在的 $\triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'B'$ 相似．容易发现 $\angle ADB=\angle A'D'B'=90°$，只要证明 $\angle B=\angle B'$，这由已知条件 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 可得．以上每一步均可逆，所以

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k.$$

师：这个同学的分析很对，请你把证明写下来．

生甲：作出 BC、$B'C'$ 上的高，分别为 AD、$A'D'$，于是

$$
\left.\begin{array}{r}\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'\Rightarrow\angle B=\angle B' \\ \text{由作法}\Rightarrow\angle ADB=\angle A'D'B'=90^\circ\end{array}\right\}
$$

$$
\Rightarrow\triangle ADB\backsim\triangle A'D'B'\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=k(\text{已知})\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AD}{A'D'}=k.
$$

师：关于相似三角形对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比．这一些性质的证明与上面证明对应高之比等于相似比的方法相类似，因此，请同学们课后完成．

师：下面请同学们考虑，相似三角形周长的比等于什么？

$\left(\text{教师画出图 2, 板书: }\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=?\right)$

师：这个式子的结构有什么特点？根据这个特点可考虑用什么方法来证明？能否考虑我们已学过的等比定理呢？

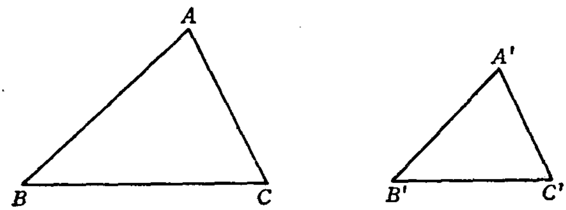


图 2

生：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'\Rightarrow\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k.$

由等比定理可得

$$
\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k,
$$

即相似三角形周长之比为相似比．

师：最后我们研究相似三角形面积之比应该等于什么？

$$
\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C',\quad S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A'B'C'}=?
$$

生：相似三角形的面积之比应该等于相似比的平方．这个结

论可以通过计算直接得出，即

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AD}{A'D'}=k\cdot k=k^2.$$

师：很好！有的同学可能以为，既然相似三角形中的各对应线段之比都等于相似比，那么它们的面积之比也应如此．现在看来这样的想法是不正确的，不仅得出这一结论的根据不足，而且没有考虑到线段量与面积量的区别．

对于相似三角形的性质，我们都一一进行了研究．下面，我们把这些性质与全等三角形的性质进行比较．由全等到相似，三角形的各对应元素之间的关系发生了怎样的变化？

（引导学生总结出：由全等到相似，对应角相等保持不变，对应线段之间的关系由相等变为比等于相似比，而面积的关系由相等变为比等于相似比的平方．）

师：如果已知 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 $\frac{2}{3}$（手指图 1），那么有哪些结论呢？

（学生回答，教师板书．）

生：$\angle B=\angle B'$，$\angle A=\angle A'$，$\angle C=\angle C'$；$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AE}{A'E'}=\frac{AF}{A'F'}=\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\frac{2}{3}$；$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{4}{9}$．

三、练　习

（出示小黑板．）

1．已知两相似三角形对应边的比是 1:4，求它们的对应高的比、面积的比、对应角平分线的比．

2．已知两相似三角形的面积的比是 1:4，求相似比、周长的比．

3．如图 3，已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$\angle C=\angle C'=90°$，$AC$、$A'C'$ 是对

应边，$AC=3$，$BC=4$，$A'B'=\frac{40}{3}$，求 $S_{\triangle A'B'C'}$.

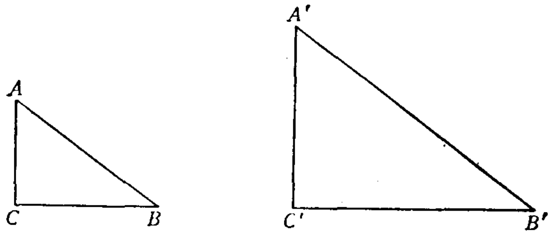


图　3

（第1、第2两题请学生口答，第3题请一个同学上黑板板演.）

4．如图4，已知：$\triangle ABC$ 中，$BC=12$，高 $AD=6$，$EF\parallel BC$，

(1) 如果 $EF=5$，求 $S_{\triangle AEF}$；

(2) 若将 EF 向上平移，使 $S_{\triangle AEF}=4$，求 $\triangle AEF$ 的高 AG.

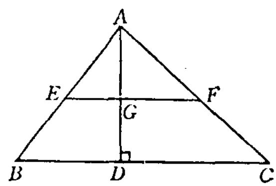


图　4

（解 (1) 分析：因为BC、AD 已知，所以 $S_{\triangle ABC}$ 可求．因 $EF\parallel BC$，故 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，由“相似三角形面积的比等于相似比的平方”求出 $S_{\triangle AEF}$.

解法一：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 12\times 6=36,$$

$$EF\parallel BC\Rightarrow\triangle AEF\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{S_{\triangle AEF}}{36}=\left(\frac{5}{12}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AEF}=\frac{25}{4}.$$

解法二：$EF\parallel BC\Rightarrow\triangle AEF\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{5}{12}=\frac{AG}{6}\Rightarrow AG=\frac{5}{2}\Rightarrow S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$.

(2) 由(1)知 $S_{\triangle ABC}=36$，$EF\parallel BC\Rightarrow\triangle AEF\backsim\triangle ABC\Rightarrow\frac{4}{36}=\left(\frac{AG}{6}\right)^2\Rightarrow AG^2=4\Rightarrow AG=2$.）

四、小　结

师：本节课我们学习了相似三角形的性质．这里特别要注

意：相似三角形对应线段的比等于相似比，周长之比等于相似比，而面积的比等于相似比的平方．当题目中有相似三角形时，常常要用到这些性质．

如果两个相似三角形的相似比为1，那么这两个三角形就全等了，对应线段、周长、面积等也都分别相等．全等是特殊的相似，三角形全等的一些性质也寓于三角形相似性质之中．

五、布置作业

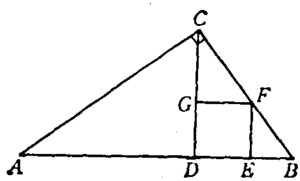
课本习题(略)．

补充题：

如图，已知$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，$CD\perp AB$于D，四边形$DEFG$是$\triangle CDB$的内接正方形．

(1) 求$S_{\triangle CDB}$；

(2) 求正方形$DEFG$的边长．



自我评述

(1) 设计本教案的想法：一节几何课，如果只是简单地出示定理、证明定理、讲例题、做练习，学生被动地听讲，单纯地记忆，模仿地做练习，这样不利于培养学生的创造性思维，而且影响学生数学能力的提高．本节课试图改变这种做法，引导学生积极探索、思考，达到既掌握知识又提高能力．

在教案设计中，我注意了从已知到未知，从特殊到一般等研究

问题的一般方法的训练，使教学效果更好，更能为学生所接受.

(2) 教学上采用"以新带旧、精心设疑、对比辨异、变式练习"等方法，充分调动学生的学习积极性，使学生不停地动脑、动手、动口，始终使学生处于最佳的思维状态之中，激发了学生的兴趣，把知识与智力、非智力因素有机地结合起来.

(3) 本节课容量较大，但由于与全等三角形的性质相类比，学生在教师引导下一步一步地探索、归纳、推证，使学生容易掌握.

相似三角形性质定理的应用

黄全福（安徽省怀宁江镇中学）

作者简历



黄全福　安徽怀宁人，1957年毕业于池州师范学校，同年任怀宁秀山中学数学教师．1987年、1990年分别被评为安徽省中学高级教师、特级教师．1984年获安庆地区模范教育工作者称号．现任怀宁江镇中学数学教师、校长，安庆市中学数学教研会常务理事，中国数学会会员．

教学目的

(1) 能利用三角形相似的判定定理去发现或构造相似三角形；会灵活运用相似三角形的性质定理去证明线段乘积相等的问题．

(2) 能利用比例的基本性质，将线段比例式化为线段乘积式，或将线段乘积式化为线段比例式，并能灵活进行两者的互换．

(3) 养成将已知条件图形化的良好习惯，即将已知条件（如相等的角、相等的边，……）搬到图形上——在图形上作出醒目的记号，增强直观效果，利于开拓思路．

(4) 养成分析图形特点、挖掘有用的隐含条件的良好习惯，这样做有利于扫除思维障碍，提高解(证)题的能力.

教学过程

一、复　　习

提问1　相似三角形的性质定理有哪几条?

(① 相似三角形对应高的比，……都等于相似比;

② 相似三角形周长的比等于相似比;

③ 相似三角形面积的比等于相似比的平方. 强调：根据定义还可得到：

④ 相似三角形的对应角相等;

⑤ 相似三角形的对应边成比例.)

提问2　在以前的解题中，经常用到的相似三角形性质定理是哪几条?

[提问1是全面复习相似三角形性质定理，在面上过一次"电影"；提问2则是引导学生重点掌握"相似三角形的对应边成比例"这一用途广泛的性质.]

二、讲　　授

这节课，我们继续讨论相似三角形性质定理的应用(板书课题). 我们看几个例题：

[例1]　在 Rt $\triangle ABC$ 中，斜边 BC 上的高 AD 与内角平分线 BE 相交于点 F (图1).

求证：$AF\cdot FD=\frac{1}{2}BF\cdot FE$.

分析：我们知道，运用相似三角形的性质定理能够证明线段

比例式.然而本题的结论却是一个线段等积式,怎样达到证明的目的呢?

(引导学生作下列探讨与思索.)

逆探: $a\cdot d=b\cdot c\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\triangle\backsim\triangle$,

即:乘积式→比例式→相似形.

顺推: $\triangle\backsim\triangle\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$,

即:相似形→比例式→乘积式.

强调指出,乘积式、比例式、相似形三位一体,由此及彼.

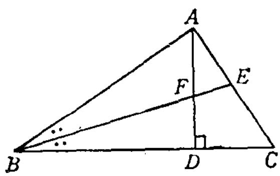


图 1

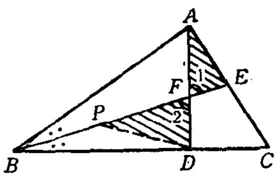


图 2

[逆探是引导学生探索解题的思路与途径;顺推是引导学生掌握解题的方法与技巧.这是思维过程的两条线索.培养学生这种良好的思维习惯,对于提高学生的各种能力,具有不可估量的意义.]

思路1 由 $AF\cdot FD=\frac{1}{2}BF\cdot FE$

$$\Rightarrow\frac{AF}{FE}=\frac{\frac{1}{2}BF}{FD}.$$

怎样得到$\frac{1}{2}BF$呢?取BF的中点P(图2),显然$PF=\frac{1}{2}BF\Rightarrow\frac{AF}{FE}=\frac{PF}{FD}$,且有$\angle 1=\angle 2$.

关键：证明 $\triangle AFE \backsim \triangle PFD$.

启发：思路 1 中的 $\frac{1}{2}$ 是与 BF 结合在一起，为造成 $\frac{1}{2}BF$，因而必须取 BF 的中点. 试问 $\frac{1}{2}$ 还可以与谁结合在一起呢？

思路 2 由 $AF\cdot FD=\frac{1}{2}BF\cdot FE \Rightarrow \frac{AF}{\frac{1}{2}FE}=\frac{BF}{FD}$.

取 FE 中点 P（图 3），显然

$$FP=\frac{1}{2}FE \Rightarrow \frac{AF}{FP}=\frac{BF}{FD},$$

且有 $\angle 1=\angle 2$.

关键：证明 $\triangle AFP \backsim \triangle BFD$.

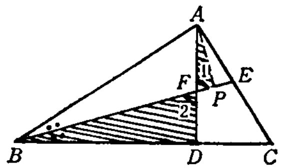


图 3

强调：FE 的中点 P 的出现，不仅满足了 $FP=\frac{1}{2}FE$ 的要求，更重要的是，由于点 P 是等腰三角形 AFE 底边 FE 的中点，得到了 $AP\perp FE$，即 $\angle APF=90°$，$\triangle AFP$ 成为一个直角三角形了.

启发：结论中的系数 $\frac{1}{2}$ 显然可以化为最简单的整数，这时等式两边须乘以 2，得到

$$2AF\cdot FD=BF\cdot FE.$$

思路 3 由 $2AF\cdot FD=BF\cdot FE \Rightarrow \frac{2AF}{FE}=\frac{BF}{FD}$.

倍长 FA（图 4），即 $PF=2AF \Rightarrow \frac{PF}{FE}=\frac{BF}{FD}$，且有 $\angle 1=\angle 2$.

关键：证明 $\triangle PFE \backsim \triangle BFD$.

思路 4 由

$$2AF\cdot FD=BF\cdot FE \Rightarrow \frac{AF}{FE}=\frac{BF}{2FD}.$$

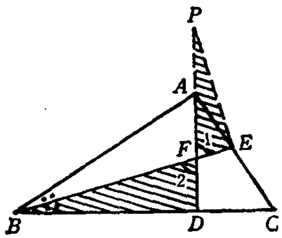


图 4

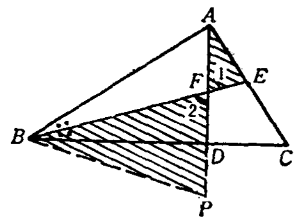


图 5

倍长 FD(图 5), 即 $FP=2FD\Rightarrow\frac{AF}{FE}=\frac{BF}{FP}$, 且有 $\angle 1=\angle 2$.

关键: 证明$\triangle AFE\backsim\triangle BFP$.

强调: 在上述四种证法中,都用到了图形中的条件 $AE=AF$ (这是容易证明的). 它告诉我们,证几何题要注意分析图形特点,挖掘并利用图中隐含的条件.

还要指出,在本例证明中要抓住以下要点:

(1) 我们要及时将线段积化为比例式问题;

(2) 由于结论中有"$\frac{1}{2}$", 我们又要善于对某一线段进行倍、分,造成单一的线段;

(3) 在线段倍、分过程中,引进了点 P,造成了以 P 为一顶点的三角形与另一三角形相似. 这说明证题中的辅助线不是凭空想象,而是要紧紧把握住图形特点与结论形式,才能添得有用.

[将已知条件图形化, 即在图形中作出表明等量关系的记号, 可增强直观效果, 有助于加深学生对图形及其题目条件的认识与理解,有助于学生寻找解题的思路. 在平时教学中,注意引导学生进行这方面的训练是大有作用的.]

[**例 2**] AD 是 $\triangle ABC$ 的高, AE 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径(图 6). 求证: $AB\cdot AC=AE\cdot AD$.

引导学生分析思路，然后看书上的证明与分析．强调：添加辅助线去构造相似三角形（$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$），对解决线段乘积式的证明多么有效．

［为什么安排这个例题呢？有两点考虑：其一，加深学生对处理线段乘积式问题思路的理解，并要求学生在推理论证中，力求叙述简练，条理清晰，步骤合理；其二，这个例题，实为一个用途极广的几何命题！在今后的解题中，实际上可以作为定理加以运用．］

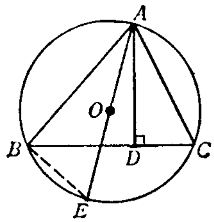


图 6

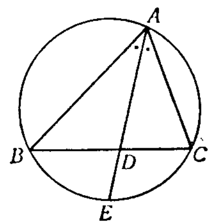


图 7

再看下面两例：

［例 3］ 将$\triangle ABC$的内角平分线AD延长交$\triangle ABC$的外接圆于E（图 7）．

求证：$AB\cdot AC=AD\cdot AE$．

要求学生板演证明过程（略）．指出：这是书上习题的演变，原题是求证：$\triangle ABD\backsim\triangle AEC$，这里改为$AB\cdot AC=AD\cdot AE$，在难度上加深了一步，目的是引导学生设法寻找或构造相似三角形．

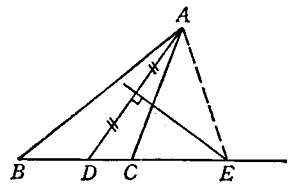


图 8

［例 4］ $\triangle ABC$的$AB>AC$，AD为内角平分线，AD的垂直平分线和BC的延长线交于点E（图 8）．

求证：$DE^2=BE\cdot CE$．

提问1 BE、CE、DE 都在同一条直线上，不可能形成三角形，怎么办？

引导学生利用 AE 代换 DE，从而来构造出相似三角形.

提问2 题目中为什么附加了 $AB>AC$ 的条件？

(1) 若 $AB=AC$，结果会怎样？

(2) 若 $AB<AC$，图形将有什么样的变化？你能想象出来吗？画图试试看.

三、总　结

(1) 利用相似三角形性质定理既可以证明线段比例式，也可以证明线段乘积式，因为比例式与乘积式可以互相转化.

(2) 证明线段比例式或乘积式，是不是就只有这一种方法呢？除掉相似三角形性质定理以外，还有哪一些定理可以用来证明这个问题，课后同学们可总结一下.

(3) 利用相似三角形性质，必须先构造相似三角形. 构造的依据是三角形相似的判定定理，在三角形相似的判定定理中，"两角等"是经常用到且行之有效的方法. 我们所讲的四种证法，就是利用"两角等"构造相似三角形的.

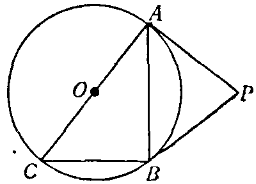
[总结(2)可造成学生的悬念，激发学生探索问题的积极性. 实际上，除相似形性质以外，还有 ① 平行线分线段成比例定理；② 三角形内、外角平分线性质定理；③ 相交弦定理；④ 切割线定理；⑤ 面积定理；⑥ 正弦定理以及 ⑦ 计算方法等等，都可用来证明线段比例式或乘积式的问题.]

五、布置课外作业

补充题：已知：PA、PB 与 $\odot O$ 相切于 A、B，AC 是 $\odot O$ 的直径.

求证：$AB\cdot AC=2\cdot PA\cdot BC$.

要求：用两种以上方法加以证明.



[复习阶段的习题主要在课内完成，课外只宜布置少量的作业，且课外作业题力求多解性；学生能用几种不同方法证明同一题目，不仅不感到负担重，相反能大大激发学习的主动性与积极性.同时，我们改编的这道题目，与本节课分析的那道题在证法上有相似之处，有助于培养学生的类比和联想能力.]

教案说明

证明线段等积式或成比例的问题有很多．无论是平时教学中的测验、考试，还是各类竞赛，这种题目常常可以见到．引导学生掌握证明线段等积式或成比例问题的思路、方法与技巧，对于深化、活化所学知识，提高思维能力和解题能力，都是十分必要的.

我认为，在初中阶段，证明线段等积式或成比例的各种方法大体上可以归结为八种方法(本书第 410 页)，而相似三角形性质定理，占有重要的位置．所谓"乘积式，比例式，相似形三位一体，由此及彼"，的确是有用的口诀和成功的经验．基于这种考虑，我便在毕业复习阶段设计了上述这节课.

还要指出，相似形和圆的关系密切，圆中的许多定理往往都与相似三角形的性质定理有关．我设计的诸多例题、习题中，有意地选用了三道与圆有关的题目，其目的是加深对这两章知识内在联系的理解，提高学生综合运用所学知识的目的.

平行线分线段成比例定理

李盛光（江西省临川二中）

作 者 简 历



李盛光　江西乐安县人，1961年毕业于江西师范大学数学系，同年任江西省临川县中学数学教师．1987年被评为江西省中学高级教师，1991年被评为中学特级教师．现任临川二中校长，江西省抚州地区数学学会常务理事，江西省中学数学教学研究会理事，江西省教育学会理事．

教学目的

使学生初步掌握平行线分线段成比例定理及其推论，并通过定理的引入和证明，帮助学生初步掌握类比的思想方法，由特殊到一般、由一般到特殊的思维方法，以及将线段比转化为面积比的技巧，以提高学生的解题分析能力．

教学过程

一、引入新课

师：我们刚学过四条线段 a、b、c、d 怎样才叫做成比例的线段？谁能回答？

生：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么线段 a、b、c、d 称为“成比例线段”。

（教师板书.）

师：说得对. 现在请同学们再思考一个问题：能不能画出一个几何图形，从中我们一眼就能找出四条成比例的线段呢？大家动手试试，看谁能画出来？

（学生思维活跃，比比画画；教师巡视发现，不少学生一时难以画出图形，少数人画出了由一组平行线构成的图形.）

师：有的同学已经画出来了，很好！大家来观察：由一组平行线构成的图形中，能得到哪些成比例的线段？

（让学生动动手，把已知的知识纳入到学习新知识的结构中.）

二、举例论述

[例]　如图 1，B 为 AC 中点，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$（教师画图并板书）.

师：图中的线段 AB、BC、DE、EF 是否成比例？

生：成比例，$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

（教师板书.）

师：为什么？

生：因为 $AB=BC$，由过去学过的平行线等分线段定理知 $DE=EF$，所以

$$\frac{AB}{BC}=1,\ \frac{DE}{EF}=1,\ 故\ \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

师：对. 这是平行线等分线段定理的妙用！它帮助我们最快地找到了四条成比例的线段. 但肯动脑筋的同学一定会进一步思

考：这组平行线 l_1、l_2、l_3（$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$），如果不等分线段 AC 即 $AB \neq BC$ 时，线段 AB、BC、DE、EF 还会成比例吗？

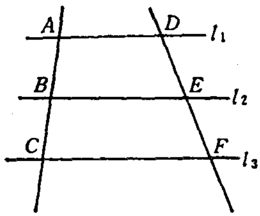


图 1

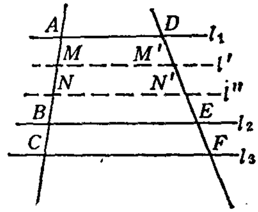


图 2

（教师画出图 2 中的实线部分，让学生思考.）

师：可以用测量的方法来帮助大家回答这个问题. 以 B 为起点，在 BA 上顺次截取和 BC 相等的线段，这可能出现以下几种情况.

第一种情况：如果截取几次，比如 3 次正好截尽，分点 M、N、B 将线段 AC 四等分.

（教师画图并板书.）

师：这时关系式 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 还能成立吗？

（学生思考后，有的说"成立"，有的说"不一定成立".）

师：让我们具体测量一下，看看 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立否？我们已知左边 AB 被 BC 量 3 次恰好量尽，现在只要看右边 DE 是否也正好被 EF 量 3 次量尽？

（教师用圆规在图 2 上演示，以 E 为起点，在 ED 上顺次截取和 EF 等长的线段，也刚好 3 次截尽.）

师：这时有 $\frac{AB}{BC}=3$，$\frac{DE}{EF}=3$，故仍然有 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立（教师板书）. 用圆规"量"的办法虽然直观，但不一定准确，全班几

十名同学量的结果就有可能不同. 因此，我们还必须用推理证明的方法，由 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$\frac{AB}{BC}=3$ 去推出 $\frac{DE}{EF}$ 也等于3，才能使人信服 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立. 谁能进行推理论证?

(教师在图 2 上启发学生完成证明.)

师：点 M、N、B 将线段 AC 分为几等份?为什么?

生：四等份，即 $AM=MN=NB=BC(AB=3BC)$.

师：过 M 作直线 $l' \parallel l_1$，过 N 作直线 $l'' \parallel l_1$，这时 l_1、l'、l''、l_2、l_3 是一组平行线吗?为什么?

(教师在图 2 中画出虚线部分.)

生：是一组平行线. 因为同时平行于 l_1 的所有直线互相平行.

师：这组平行线是否也将 DE 分成四等分?根据是什么?

生：根据平行线等分线段定理，由 $AM=MN$，可得 $DM'=M'N'$；由 $MN=NB$，可得 $M'N'=N'E$；由 $NB=BC$，可得 $N'E=EF$. 所以这组平行线将 DF 分成四等分.

师：于是 $DE=3EF$，$\frac{DE}{EF}=3$，又已知 $\frac{AB}{BC}=3$，所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立.

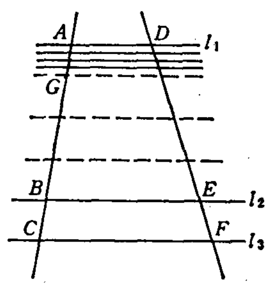


图 3

下面看出现的第二种情况：

如果截取 3 次后还剩余一条小于 BC 的线段 GA，那么再以 G 为起点，在 GA 上顺次截取等于 $\frac{BC}{10}$ 的线段，截 4 次正好截尽.

(教师画图 3 并板书.)

师：这时关系式 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 还能成立吗?

生：成立.

师：大家的判断是对的． 这时 $\frac{AB}{BC}=3.4$，可用上面同样作平行线的方法，由平行线等分线段定理可得 $\frac{DE}{EF}=3.4$，故 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$．

下面，再看出现的第三种情况：

如果 $\frac{BC}{10}$ 去截取还剩余，那么可以用 $\frac{BC}{100}$ 去截；如果还有剩余，那么可以用更小的单位 $\frac{BC}{1000}$ 去截；……（教师板书．）

如果 $\frac{AB}{BC}=3.47$，那么 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立吗？

生甲：同样也会有 $\frac{DE}{EF}=3.47$，则 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立．

师：如果 $\frac{AB}{BC}=3.476$，那么 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立吗？

生乙：同样也会有 $\frac{DE}{EF}=3.476$，则 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立．

师：如果 $\frac{AB}{BC}=3.476\cdots$，那么同样也会有 $\frac{DE}{EF}=3.476\cdots$．以上情况告诉我们，当 AB 能被 BC 量尽，或被更小的单位 $\frac{BC}{10}$、$\frac{BC}{100}$、$\frac{BC}{1000}$、……量尽时，总有 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立．

［上面由平行线等分线段得到比例线段的情形，类比引出平行线不等分线段也得到比例线段的情形，这是思维的一大飞跃，由直观测量看出结果上升到理论上的推证是思维水平的又一次升华．教师要善于启发诱导，帮助学生深化思维．］

师：现在请大家思考一下，如果 BA 不能被 BC 量尽，也不能被更小的单位 $\frac{BC}{10}$、$\frac{BC}{100}$、$\frac{BC}{1000}$、……量尽时，平行线 l_1、l_2、l_3 能否使 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 仍然成立呢？也就是说是否仍然可以使得线段

AB、BC、DE、EF 成比例呢?

生：仍然成立.

师：对的. 因为总可以用能量尽 BC 的更小单位从 B 向 A 量下去，逐步逼近点 A，作平行线的方法是一样的. 这就是说，$\frac{AB}{BC}$ 是任何实数时，这组平行线 l_1、l_2、l_3 都能使 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立，即都可保证线段 AB、BC、DE、EF 成比例. 这就是我们今天所学的.(板书.)

平行线分线段成比例定理：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

[由 AB 能被 BC 量尽，能被 $\frac{BC}{10}$ 量尽，能被 $\frac{BC}{100}$ 量尽，……等一系列个别情形，去归纳、猜想出在 AB 不可能被 BC 的更小的单位量尽时也有 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 成立的一般性结论，这是发现新命题、寻找新规律的一种创造性思维方法，应予提倡、鼓励和训练. 但这归纳、猜想的结论一定要就一般情形进行证明，否则不能确认它是真命题. 这一点必须让学生牢牢记住，以避免滥用猜想而造成错误.]

三、几 何 证 明

师：上面，我们用测量的方法和“逐步逼近”的思路论证了“平行线分线段成比例定理”. 是否还有其他几何方法能更简捷地加以证明呢？比如，考虑是否可以将 $\frac{AB}{BC}$、$\frac{DE}{EF}$ 转化为三角形的面积比？再看这些面积比是否相等？

(教师画出图 4.)

师：在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle BEC$ 中，$\frac{AB}{BC}$ 能否用两个三角形的面

积比表示？

生：能．$\frac{AB}{BC}=\frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle BEC}}$.

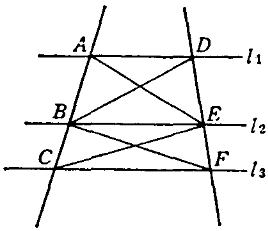


图 4

师：为什么？

生：同高的两个三角形面积之比等于两底之比．

师：在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle BEF$ 中，$\frac{DE}{EF}$ 能否用两个三角形的面积比表示？为什么？

生：能．$\frac{DE}{EF}=\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle BEF}}$，理由同上．

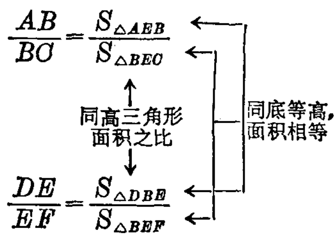
师：$\triangle AEB$ 与 $\triangle DBE$ 的面积是否相等？为什么？

生：相等．因为它们同底、等高．

师：$\triangle BEC$ 与 $\triangle BEF$ 的面积是否相等？为什么？

生：相等．也因为它们同底、等高．

（这时在黑板上完成了下面的分析图．）



师：这样，我们实际上就完成了 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 的证明．现在，大家动笔在课堂练习本上把证明过程写出来，我请一位同学到黑板上来写．

生：已知：如图 4，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$.

求证：$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

证明：连结 AE、CE.

因为 $\triangle AEB$ 和 $\triangle BEC$ 的高相同，所以

$$\frac{AB}{BC}=\frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle BEC}}.$$

同理，

$$\frac{DE}{EF}=\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle BEF}}.$$

$\because$ $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$,

$\therefore$ $S_{\triangle AEB}=S_{\triangle DBE}$, $S_{\triangle BEC}=S_{\triangle BEF}$.

（同底等高的三角形面积相等）

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle BEC}}=\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle BEF}}.$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

师：很好．从中大家看到了用面积法证题的优越性．为了熟悉用面积方法证题，我们再来探求第二种几何证法，看看能否把线段 AB、BC、DE、EF 集中在一个三角形里来研究．

（教师画出图 5，并示意平移 AC 到 DQ的位置，启发学生作辅助线.）

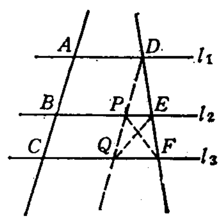


图 5

生：可以．这只需过点 D 作一条 AC 的平行线，就可把证明 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ 的问题转化成在 $\triangle DQF$ 中证明 $\frac{DP}{PQ}=\frac{DE}{EF}$ 的问题.

师：对．在 $\triangle DQF$ 中，能否也用面积法证明 $\frac{DP}{PQ}=\frac{DE}{EF}$ 呢？

生：能.

（学生口述，教师板书下面的分析、推理过程.）

$$\left.\begin{aligned}\frac{AB}{BC}=\frac{DP}{PQ}=\frac{S_{\triangle DPE}}{S_{\triangle PEQ}}\\ \frac{DE}{EF}=\frac{S_{\triangle DPE}}{S_{\triangle PEF}}\end{aligned}\right\}\text{—同底等高，面积相等}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

师：在$\triangle DQF$中证得的结果是一个值得重视的结论："平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例."（板书.）

这个结论也可以看作是三条平行线截两条相交直线的特殊情形(图5中的l_1经过交点D)而得到，也就是它可以由平行线分线段成比例定理直接推出，故称它为平行线分线段成比例定理的"推论".（教师在该结论前板书"推论"两字.）请同学们翻开课本，从"定理"开始，阅读到"推论"后两行结束.

（学生看书.）

[在定理的证明过程中，介绍了将线段比转化为面积比的思维方法；在探索第二种几何证法时，介绍了将不在同一个三角形内的线段比转化为同一个三角形内的线段比的思维方法；在由定理导出推论的过程中，介绍了由一般情形转化为特殊情形的思维方法，这种转化的思维方法，往往化繁为简，化难为易，使问题迎刃而解，教学中必须让学生逐步熟悉、掌握.]

四、课堂练习

师：上面，我们学了"平行线分线段成比例定理"及其"推论"，现在大家来做几道练习题，看看对今天讲的定理和推论是否理解、掌握了.

1. 如图6，$AE\parallel BF\parallel CG$，$AB=2\text{cm}$，$BC=3\text{cm}$，$EG=7\text{cm}$，求$EF$的长.

2. 如图7，$DE\parallel BC$，$DF\parallel AC$，判断下列比例是否正确？若不对，则改

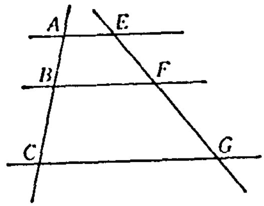


图 6

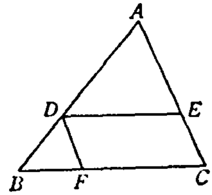


图 7

正:

(1) $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{AC}$; (2) $\frac{AE}{EC}=\frac{BF}{FC}$;

(3) $\frac{AE}{EC}=\frac{DE}{BC}$; (4) $\frac{BD}{DA}=\frac{BF}{DE}$.

3. 如图8, $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$, $AM=3\text{cm}$, $BM=5\text{cm}$, $EF=15\text{cm}$, 则 $EK=$____, $FK=$____.

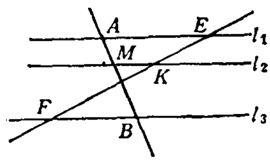


图 8

(三名学生分别板演，其他同学自做，然后师生共同评议. 第1题, 重点评议是否正确列出$\frac{AB}{BC}=\frac{EF}{EG-EF}$; 第2题, 重点评议使用推论时要注意"对应线段成比例"; 第3题, 重点评议在正确看图, 使用定理时, 找准"被平行线截得的对应线段成比例": $\frac{AM}{AB}=\frac{EK}{EF}$, $\frac{BM}{BA}=\frac{FK}{FE}$.)

五、小　　结

(师生共同完成.)

(1) 使用"平行线分线段成比例定理"及其推论时，一要看清平行线组；二要找准被平行线组截得的对应线段，否则就会产生错误.

(2) "平行线分线段成比例定理"及其推论中的比例线段可根据图形简捷、形象、准确地进行记忆：

$$\frac{左上}{左下}=\frac{右上}{右下},\quad \frac{左上}{左全}=\frac{右上}{右全},$$
$$\frac{左下}{左全}=\frac{右下}{右全},\quad \frac{左上}{右上}=\frac{左下}{右下}=\frac{左全}{右全}.$$

(3) 定理可用于有平行线的图形中，直接判断线段成比例，或将两线段之比转化为另外的线段比.

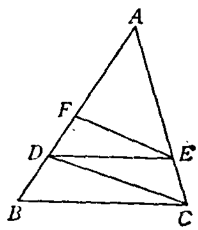
(4) 用面积法证题是一条重要途径，需多加训练.

六、布 置 作 业

1. 复习"平行线分线段成比例定理"及其推论，追忆用面积法如何证明此定理.

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中 $DE \parallel BC$，$EF \parallel CD$，证明 AD 是 AF 和 AB 的比例中项.

3. 思考题：平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC 的直线，与另两边 AB、AC（或 BA、CA）的延长线相交于点 D、E，画出图形，并说出图中所有的成比例的线段.



（第 2 题）

自我评述

(1) 本教案设计的出发点是把课本中无法严格证明的“平行线分线段成比例定理”变成完全可以严格证明、学生完全可以接受的内容.书上采用的是实数逼近理论和方法,这对于无理数知识了解十分粗浅的初二学生来说是很困难的,是难以接受的.事实上到大学讲了系统的极限理论之后,也不是所有大学生都能领会的.本教案不满足于这种烦琐玄奥、不严密的证法,另辟新径,巧妙地运用面积方法简捷地完成了证明,使学生在第一册几何中所学的三角形面积公式和等底等高的三角形面积相等的性质得到了巧妙的运用,让他们第一次感受到用面积法证题、解题的优越性.

(2) 本教案贯穿着由已知到未知、由直观到抽象、由浅入深、由易到难的设计思想.从复习比例线段的概念,诱导到用平行线组去构图得到比例线段;从平行线等分线段得到比例线段,到不等分线段也得到比例线段的观察与推理;从定理及其推论的证明和识记,到通过练习题的训练加深对定理的理解和掌握.这些都是这一设计思想的反映.教师应通过卓有成效的启发式教学和合理的画图、板书,把这一设计思想充分地体现出来.

(3) 本教案把一些重要的数学方法渗透在各个“双基”知识链中.比如,由平行线等分线段到不等分线段去得到比例线段的教学过程中,用了“类比”的思维方法;从 AB 能被 BC 量尽,被 $\frac{1}{10}BC$ 量尽,……到 AB 不能被这些单位线段量尽,都能由平行线得到比例线段的教学过程中,用了“归纳”、“猜想”的思维方法;在定理、推论证明中,将线段比变为面积比,将非三角形中线段比变为三角形中线段比的教学过程中,用了“转化”的思维方法;从“举例论述”到得出“定理”,又从“定理”得到“推论”的教学过程中,用了从“特殊到一般”、“从一般到特殊”的思维方法.教师要注意向学生传授、训练这些重要的数学方法,但只能因势利导,潜移默化,千万不可堆砌和求深.

(4) 本教案在教材处理上注意做到重点突出,取舍合理,详略得当,讲读练有机结合. 对于 AB 能被 BC、$\frac{BC}{10}$、$\frac{BC}{100}$、……量尽时,用的是课本中的平行线等分线段定理的推理方法. 当 AB 不能被这些单位线段量尽时,就一句带过课本中的"逼近法",而较详细地引入了面积法推证. 在由定理导推论时, 精心安排学生阅读课文, 以强化定理、推论及其内在联系. 为了突出定理、推论中的"平行线"和"对应线段", 针对性地编选了三道课堂练习题和课外作业题,以增强教学效果.

(5) 本教案采用的教学方法是谈话法, 其显著特色是启发式教学贯穿于始终. 通过师生间一系列的双边活动,如提问与回答,讲授与思考,口述与板书, 练习与评议, 读书与画图等等, 把学生的学习积极性充分调动起来, 让他们在主动和愉快的气氛中接受知识和技能, 但又不追求表面上的轰轰烈烈, 着眼于"落实"二字, 所采取的每个步骤都是从有利于接受、巩固、掌握新的数学知识和新的数学方法考虑的.

(6) 课时分配: 本节教材分三个课时授完. 第一课时讲定理的引入和证明(含推论); 第二课时讲例题及在教师指导下做练习; 第三课时多型练习,灵活运用,巩固提高. 本教案用于第一课时.

三角形中位线定理

胡厚龄（南京市第八中学）

作 者 简 历



胡厚龄　江苏南京人，1954年在南京市第一中学高中毕业，同年任南京市第八中学数学教师.1987年被评为中学高级教师.1985年获江苏省普通教育改革优秀成果奖，1986年获南京市优秀教育工作者称号，1989年被评为南京市普教"十佳"教师，同年被评为全国优秀教师.现任南京市第八中学数学教师.

教学目的

(1) 引导学生通过观察、实验、联想来发现三角形中位线的性质.

(2) 启发学生用不同的方法来证明三角形中位线定理，培养学生发散性思维.

教学过程

一、教师提出问题，指导学生自学

（出示小黑板.）

问题 1 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 中点，自 D 作 BC 的平行线交 AC 于 E，点 E 在 AC 的什么位置上？

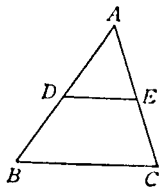


图 1

（通过复习，为学生寻求问题 2 的结论作准备.）

问题 2 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 中点，E 为 AC 中点，DE（$\triangle ABC$ 的中位线）与 BC 有什么关系（位置关系和数量关系）？用数学命题形式写出这个关系.

问题 3 怎样证明这个命题？

［思考提纲既要有利于学生系统地掌握基础知识，又要有利于学生求异，创新.］

对于问题 2，大多数学生很快就得出 $DE /\!/ BC$. 学生是用以下三种方法得出的：(1) 联想问题 1 猜出来的；(2) 看图猜出来的；(3) 用量角器量得 $\angle B$ 和 $\angle ADE$ 的度数后下结论的. 对于结论 $DE=\frac{1}{2}BC$，又有以下三种情况：(1) 未想到这个结论；(2) 用刻度尺量 DE 与 BC 的长度、用圆规比划后下结论；(3) 翻书找结论.

［发明、创造往往是由直觉思维推出正确答案，然后由分析思维去验证它，这种寻找结论的思维方式要鼓励.］

对于问题 3，学生是这样思考的：(1) 延长 DE；(2) 自 E 在三角形内作 AB 的平行线；(3) 找 BC 的中点.

［在探求证题思路上，也要鼓励学生求异思维，激发他们主动地探求新知识.］

针对这些问题，教师可指导学生阅读教材有关逆命题、逆定理的内容，同时启发他们从如何构成平行四边形上去思考.

[构成平行四边形是添辅助线的必由之路，但构成哪个平行四边形还要学生自己去探索，这样提示并不影响学生的发散性思维.]

对于添辅助线有困难的学生，教师及时个别辅导. 学生把问题2的结论找出来了，证题的思路也打开了，不会添辅助线的学生经教师个别辅导后也得到启发. 这时，教师组织同列前后两排的四位学生一起讨论.

二、组织小组讨论

通过自学，问题1和问题2中的 $DE /\!/ BC$ 虽然解决了，但各人寻结论的方法不尽相同，少数人对 $DE=\frac{1}{2}BC$ 还未找出来，尤其对问题3的探索还有待深化. 为此，教师把思考提纲改成下面两个讨论提纲：

(1) DE 与 BC 在数量上有什么关系？

(2) 怎样用平行四边形来证明你的结论？

[自学中已解决的问题不要再拿到小组里讨论. 小组里只讨论在自学中普遍存在的倾向问题及这节课要解决的关键问题.]

学生讨论时，教师要掌握各组讨论情况：(1) 记录学生提出来的新问题(包括解题方法)；(2) 收集、提炼全班的交流内容；(3) 巡回答疑；(4) 及时引路.

在小组里，寻结论问题很快就解决了，可以组织学生来回答.

讨论证法时，多数人认为延长 DE 到 F，使 $EF=DE$，连结 CF，按图2添辅助线(这也是教材中介绍的一种方法). 还有两种意见：

(1) 我们习惯用全等三角形来证明线段相等，还是证 $\triangle EDA$

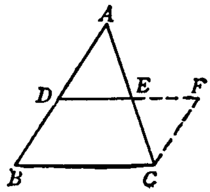


图 2

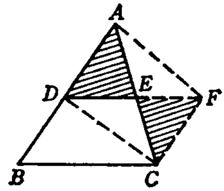


图 3

$\cong\triangle EFC$. (2) 再按图3连结 AF、DC, 一下就看出四边形 $ADCF$ 是平行四边形了. (在教材基础上又开拓了一步.)少数人认为取 BC 中点或自 E 在三角形内作平行线走不通; 个别人在争论要不要添辅助线证 $DE/\!/BC$. 这时, 教师抓住走得通或走不通问题、要不要添辅助线问题再次发动大家讨论.

[在教学中, 教师抓住学生提出来的实质问题引导大家讨论, 是学习能不能深化的转折.]

有的论证问题在小组里得不到解决, 同时, 学生的思维发散后, 又会提出一系列新问题, 这可以组织他们在全班交流.

三、全 班 交 流

教师及时在学生中发现独特的见解, 好的证法, 组织学生进行交流.

(前两步教学已解决了寻结论问题. 全班交流要进一步解决论证问题.)

教师先请一位学生在黑板上再次画出图1; 再请另一位学生在黑板上写出已知、求证; 然后指定三位学生在黑板上把自己的证法写出来. 同时, 教师把在巡视时发现的三种添辅助线的方法介绍给大家: (1) 过 E 作 AB 的平行线(这是探索中的新发现); (2) 取 BC 中点 F, 连结 FE 并延长(这是又一新发现); (3) 过

A 作 BC 的平行线(这一发现使原来认为走不通的可以走通了)。

针对新添的辅助线，教师提问：现在又可构成哪个新的平行四边形？这样添辅助线后能否想起新的证法来？这时，课堂气氛活跃。接着教师指出一个定理的逆命题经过证明是真命题，才能当定理用，并说明同一法的原理。自 D 作 BC 的平行线交 AC 于 E'，则 E' 为 AC 中点，又 E 为 AC 中点，而线段 AC 只有一个中点，故 E' 与 E 重合。两点只能确定一条直线，今 $DE' \parallel BC$，所以 $DE \parallel BC$。这种证明方法称为同一法。

[新知识的获得必须建筑在已有知识的基础上。学生未学过同一法，为了解答不添辅助线来证明 $DE \parallel BC$ 的问题，教师在此穿插讲解是必要的。]

在课堂上，除教材上的证法外，同学们又交流了如下六种证法，现将证明的主要步骤简单摘录如下：

证法 1 如图 2，延长 DE 至点 F，使 $EF=DE$，连结 CF。

$$\because \quad AE=EC,\ \angle AED=\angle CEF,\ DE=EF,$$

$$‥ \quad \triangle ADE \cong \triangle CEF.$$

$$\therefore \quad AD=CF,\ \angle A=\angle ECF.$$

$$\therefore \quad AB \parallel FC.$$

又 $DB=AD$，$\therefore DB \mathrel{\underline{\parallel}} FC$。

所以，四边形 $BCFD$ 是平行四边形。

证法 2 如图 2，自 C 作 AB 的平行线交 DE 的延长线于 F。

$$\because \quad CF \parallel AB,\ \therefore \quad \angle A=\angle ECF.$$

又 $AE=EC, \angle AED=\angle CEF$，

$$\therefore \quad \triangle AED \cong \triangle CEF.\ \therefore \quad AD=FC.$$

又 $DB=AD$，$\therefore DB \mathrel{\underline{\parallel}} FC$。

所以，四边形 $BCFD$ 是平行四边形。

证法 3 如图 3，自 C 作 AB 的平行线交 DE 的延长线于

F，连结 AF、DC.

$\because AE=EC$, $\quad\therefore DE=EF$.

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形. $\therefore AD\underline{\parallel}FC$.

又 D 为 AB 中点，$\therefore DB\underline{\parallel}FC$.

所以，四边形 $BCFD$ 是平行四边形.

证法4 如图4，过 E 作 AB 的平行线交 BC 于 F，自 A 作 BC 的平行线交 FE 于 G.

$\because AG\parallel BC$, $\therefore \angle EAG=\angle C$.

又 $AE=EC$, $\angle AEG=\angle CEF$,

$\therefore \quad \triangle AEG\cong\triangle CEF$. $\therefore \quad AG=FC$, $GE=EF$.

又 $AB\parallel GF$, $AG\parallel BF$, $\therefore$ 四边形 $ABFG$ 是平行四边形.

$$\therefore \quad BF=AG=FC,\ AB=GF.$$

又 D 为 AB 中点，E 为 GF 中点，$\therefore DB\underline{\parallel}EF$.

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形.

$$\therefore \quad DE\parallel BF,\ \text{即}\ DE\parallel BC,\ DE=BF=FC,$$

即
$$DE=\frac{1}{2}BC.$$

证法5 如图4，取 BC 中点 F，连结 FE 并延长，自 A 作 BC 的平行线交 FE 的延长线于 G.

$\because AG\parallel FC$, $\therefore \angle EAG=\angle C$.

又 $AE=EC$, $\angle AEG=\angle CEF$, $\therefore\triangle AEG\cong\triangle CEF$.

$\therefore GE=EF$, $AG=FC=BF$，即 $AG\underline{\parallel}BF$.

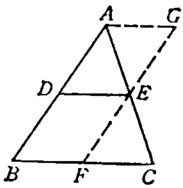


图 4

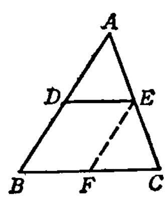


图 5

$\therefore$ 四边形 $ABFG$ 是平行四边形．以下证题过程同证法 4.

证法 6　如图 5，由同一法证得 $DE \parallel BC$．自 E 作 AB 之平行线交 BC 于 F．

$\because E$ 为 AC 中点，$\therefore BF=FC$.

$\because DE \parallel BF$，$EF \parallel DB$，

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形.

$\therefore DE=BF=FC$，即 $DE=\frac{1}{2}BC$.

[自学、讨论、交流不是简单的重复，而是逐步深化．自学是讨论的基础，自学、讨论又为交流创造了条件．在整个活动中，始终体现教师是主导，学生是主体的状态，使学生一直掌握着学习的主动权．]

在前面的教学中，学生哪些问题解决了，哪些问题未解决，哪些问题解决得透，哪些地方有待深化，教师是心中有数的．这为教师有针对性讲解创造了良好条件.

四、有针对性地讲解

[通过讲，进一步帮助学生整理、归纳、提高；通过讲，进一步完善学生的认知结构．在讲的过程中，要允许学生提出新问题，要把学生提问题贯穿在课堂教学的始终.]

1．学生阅读课本，教师提问

(1) 什么叫三角形的中位线？一个三角形有几条中位线？它和三角形的中线有何区别？

(2) 三角形中位线定理的条件是什么？结论是什么？结论有几个？它和平行线等分线段定理的推论 2 有何关系？

学生回答问(1)后，教师强调中位线与中线的异同，尤其讲清不同点.

学生回答问(2)后，教师强调中位线是条件，结论有两个．应用

时，有时两个结论同时用，有时只用其中一个结论. 书写时，只要把教材中的已知改成“∵”，把求证改成“∴”.

2. 指导学生做好两件事

(1) 指导学生先把画在纸上的$\triangle ABC$剪下来，再把$\triangle ADE$剪下来，按照图6那样，把$\triangle ADE$中的EA与EC重合，拼成$\square DBC(A)F(D)$后，再对交流中学生写的前三种证法进行小结.

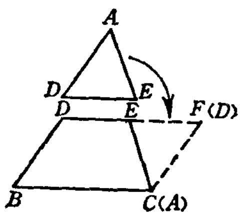


图 6

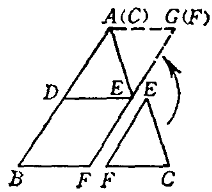


图 7

(2) 指导学生把$\triangle ABC$中的$\triangle EFC$(F为BC中点，或$EF\parallel AB$)剪下来，按图7拼成$\square A(C)BFG(F)$后，再对交流中学生写的证法4、证法5进行小结.

3. 对在证题时提出以下思路者进行表扬，鼓励大家大胆探索

(1) 自C作AB的平行线交DE的延长线于F;

(2) 连结DC、AF，构成$\square ADCF$;

(3) 过E作AB的平行线交BC于F，自A作BC的平行线交FE于G;

(4) 取BC中点F，自A作BC的平行线交FE的延长线于G.

五、布 置 作 业

(1) 在笔记本上，把交流的六种证法整理出来;

(2) 选择你最喜爱的一种证法，参照教材上的书写格式，在作

业本上认真地写出来;

(3) 课本习题(略).

教案说明

(1) 学生能否看书?

这节课，笔者是不主张学生先看书的. 其目的是不想先把谜底给学生，而是引导学生参与知识的发生过程，让学生通过观察、联想、实验去探索发现结论，发展学生思维的广阔性和独特性.

(2) 论证花的时间太多，是否得不偿失?

这样安排，时间确实紧. 要补一节习题课，要在教学过程中把板演和讲解同时进行. 但是，还是得大于失的: 第一，证明定理是帮助学生掌握知识体系的重要环节; 第二，这个定理的证明综合运用了前面已学过的平行线、全等三角形、平行四边形、中心对称等重要知识，又揭示了某些辅助线的添置方法，这是一道很典型的题目; 第三，证题时，强化了思维过程的教学，培养了求异思维，有益于开发学生的智力.

梯形的中位线定理

任克温（山西省中阳二中）

作者简历



任克温　山西中阳县人，1961年毕业于山西大学数学系，同年任中阳中学数学教师．1987年、1988年分别被评为山西省中学高级教师、特级教师．1989年被评为全国优秀教师并授予优秀教师奖章．现任中阳二中数学教师、校长，山西省中小学数学教学研究会理事，山西省教育管理研究会理事．

教学目的

使学生掌握梯形中位线定理及证明方法，并能熟练应用它解决有关问题．

教学过程

一、复习旧知，引入新课

师：请同学们回忆一下，什么叫做三角形的中位线？它有什么

性质？

生：连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线．三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半．

（教师画出图1，请学生根据图形，用式子表示上述性质．）

生：如图1，在$\triangle ABC$中，D、E分别是AB和AC的中点，则$DE \parallel BC$，且$DE=\frac{1}{2}BC$．

师：我们把连结梯形两腰中点的线段叫做梯形的中位线．请同学们画一个梯形，并按中位线的定义，画出梯形的中位线．

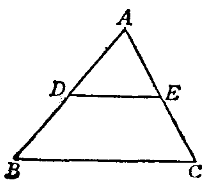


图 1

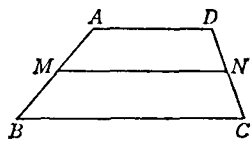


图 2

（学生画出图2，教师巡视．）

师：梯形的中位线有什么性质呢？是否也平行于它的上、下底边呢？它的长度与上、下底的长度有什么关系呢？我们今天要研究的课题就是梯形中位线及其性质．

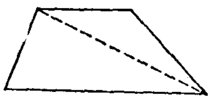
（板书：梯形中位线性质．）

师：和以前我们研究任何新课题一样，把一个未知问题化归为几个已知问题，通过已知来解决未知．因此，在研究梯形的中位线时，应尽可能利用我们已经熟悉的三角形的中位线定理．那么，如何将梯形化归为三角形呢？大家回忆一下已经熟悉的基本图形添线法

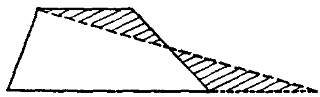
（平面几何图形可以通过各种不同图形的不同组合而发生无穷的变化．但只要我们对任一几何图形加以分析，就会发现，它们都是由一个或若干个最简单、最基本的图形组合而成．因此，对一

个几何问题，我们可以根据它的条件和结论，根据分析，添加辅助线，找到组成它的一个或若干个基本图形．这种添辅助线的方法称为基本图形添线法．）

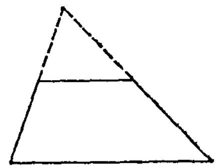
梯形化为三角形或平行四边形的常用添线法如图 3 所示．



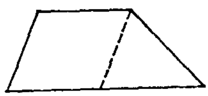
连结对角线将梯形变为两个三角形



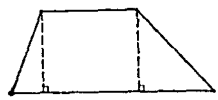
取一腰中点与一顶点连线割补为三角形



延伸两腰将梯形变为两个三角形差．



过一顶点作一腰平行线，分为平行四边形与三角形



过两顶点作下底垂线，分为矩形与两直角三角形．

图 3

二、相互讨论，启发诱导

师：根据图 2，现在请同学们相互讨论研究，探讨梯形的中位线与它的上、下底有什么关系？是否与三角形的中位线性质相类似？如何借助三角形中位线定理来解决梯形中位线性质的证明？

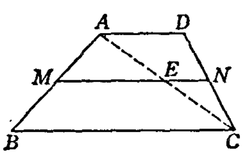


图 4

（学生讨论，教师巡视，并为启发学生讨论作些提示．）

师：谁来说说自己的想法和证法？

生甲：梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半．（板书．）

师：这个结论也称为梯形中位线定理．你是怎样得出这个

结论的呢?

生甲:在图4中,先连结 AC,取中点 E,再连结 ME、NE,应用三角形中位线定理和平行公理及推论来证.

师:这个想法很好!连结梯形的一对角线,将梯形化为两个三角形,就能利用三角形中位线性质了.但这里应特别指出的是,不能连结 AC 和 MN 的交点 E,就说 E 是 AC 的中点.所以先必须证明 E 是 AC 的中点,或者证明 AC 的中点 E 和 M 的连线 ME,以及 E 和 N 的连线 NE 重合才行.请同学甲把证明写出来.

生甲:(板书.)

已知:梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel CD$,$AM=BM$,$DN=CN$.

求证:$MN \parallel BC$,$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

证明:连结 AC,并取中点 E,连结 ME.

在 $\triangle ABC$ 中,$\because AM=BM$,$AE=CE$,

$\therefore ME \parallel BC$,且 $ME=\frac{1}{2}BC$.(三角形中位线定理)

同理,NE 是 $\triangle ACD$ 的中位线,就有

$$NE \parallel AD,\text{且 } NE=\frac{1}{2}AD.$$

又因 ME 和 NE 都通过点 E,且 $ME \parallel BC$,$NE \parallel BC$,所以 M、E、N 在同一直线上,即 ME、NE 重合.(平行公理)

所以,有 $MN \parallel BC \parallel AD$,且

$$MN=ME+NE=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AD$$

$$=\frac{1}{2}(BC+AD).$$

师:大家看证得对吗?这里 M、E、N 在同一直线上容易忽视,同学甲证明很严格,证得太好了!还有其他证法吗?

生乙：有！如图 5，连结 AN，并延长与 BC 的延长线相交于点 E，同样能够构成 $\triangle ABE$. 只要证 $\triangle AND \cong \triangle CEN$ (ASA)，使点 N 为 AE 的中点，再利用三角形中位线性质也可证得.

师：好！这种证法添辅助线方法不同，涉及知识要求是相同的. 也很好！还有其他证法吗？

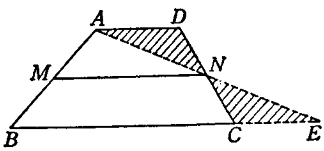


图 5

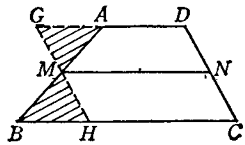


图 6

生丙：还有一种证法. 过点 M 作 $GH \parallel CD$ 交 BC 于点 H，交 DA 的延长线于点 G，应用全等三角形及平行四边形的性质来证(如图 6)，同样可证得上述结论.

师：这种证法太漂亮了！同学丙能够不受我们开始讲的应用三角形中位线定理的限制，而是利用平行四边形和全等三角形性质，这种不受束缚、善于创新思考的精神值得大家学习！还有没有其他证法呢？

生丁：如图 7，过点 A 作 $AH \parallel DC$ 交 BC 于点 H，取 AH 的中点 G，连结 MG、NG，利用平行四边形性质、三角形中位线定理和有关公理也可证明.

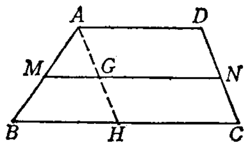


图 7

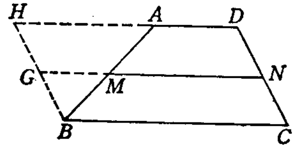


图 8

师：这里同样要注意证明 M、G、N 三点在一直线上，否则就会失误.

生戊：还可以这样来证：如图 8，过点 B 作 $HB /\!/ CD$ 交 DA 的延长线于点 H，取 BH 的中点 G，连结 MG、NG. 利用平行四边形性质、三角形中位线定理和平行公理来证.

师：很好！丙、丁、戊三位同学，从梯形的 M、A、B 不同的三点作腰 CD 的平行线，都构成了平行四边形，都是利用平行四边形的性质、三角形中位线定理及平行公理证明，基本证题思想是一致的. 请同学们再考虑，还有没有其他的证法呢？大家还可以进一步讨论，不要受三角形中位线、梯形、平行四边形的限制，想想新的证法.

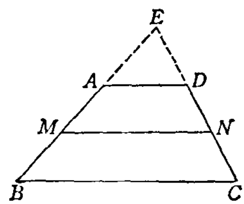


图 9

生己：有！如图 9，延长 BA、CD 相交于 G，利用平行线分线段成比例定理的推论及逆定理证明.

延长 BA、CD 交于点 E.

$$\left.\begin{array}{r} AD /\!/ BC \Rightarrow \dfrac{EA}{AB}=\dfrac{ED}{CD} \Rightarrow \dfrac{EA}{\frac{1}{2}AB}=\dfrac{ED}{\frac{1}{2}CD} \\ AM=\dfrac{1}{2}AB \\ DN=\dfrac{1}{2}CD \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EA}{AM}=\frac{ED}{DN}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow AD /\!/ MN \\ AD /\!/ BC \end{array}\right\} \Rightarrow AD /\!/ MN /\!/ BC.$$

$$\left.\begin{array}{r} AD /\!/ MN \Rightarrow \dfrac{AD}{MN}=\dfrac{EA}{EM} \\ MN /\!/ BC \Rightarrow \dfrac{BC}{MN}=\dfrac{EB}{EM} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD+BC}{MN}=\frac{EA+EB}{EM}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{AD+BC}{MN}=\dfrac{EA+EM+MB}{EM} \\ BM=AM\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD+BC}{MN}$$

$$=\frac{2EM}{EM}=2 \Rightarrow MN=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

师：很好！大家思路活跃，共找出了六种证明梯形中位线定理的方法，这些证明都是正确的.（此时还有学生举手.）可能还有另外的证法，限于时间关系，课后大家再继续研究.

[教师引导激励学生积极思考，探索证明思路，开阔思维，促使学生自始至终处于积极的思维活动中，学得活泼主动，较好地把学习定理与培养学生的分析探究能力融为一体.]

三、小　　结

师：我们分析这些证法的特点，它们都是根据我们经常应用的基本图形添线法，其中有添加对角线等，转化为三角形的中位线的基本图形（证法1、2）；添腰的平行线，转化为平行四边形和三角形（证法3、4、5）；转化成平行线分线段成比例定理的推论的基本图形（证法6）. 只要大家学会了正确的分析，具备了一定的分析能力，对于研究任何新的课题都会迎刃而解的.

梯形中位线性质的几种证法，也再一次证明了同学们分析问题的能力有了进一步的提高.

还需指出，用运动的观点来看，当梯形的一个顶点 D 沿着 DA 运动，顶点 D 与顶点 A 重合时，梯形就变为三角形，梯形的中位线也就是三角形的中位线了. 因为，梯形的上底为零，所以，中位线就只有下底的一半了；反之，D 从顶点 A 出发沿着平行于 BC 的直线移动到某一点 D，连结 DA 即为梯形，三角形的中位线就变为梯形的中位线了. 应该把三角形的中位线和梯形的中位线联系起来，如图 10 所示.

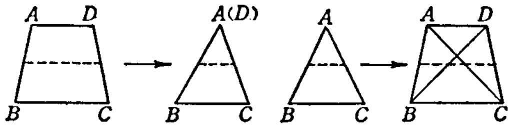


图 10

四、通过练习，巩固新课

师：请同学们应用已学过的梯形中位线定理来解些题目：

1．（口答）梯形两底的比为3:7，差为3.2cm，求梯形的中位线.

生：答4cm.

师：怎样得出来的？

生．根据条件，设上、下底分别为$3x$、$7x$，则就有

$7x-3x=3.2$，得$x=0.8$.

中位线为$\frac{3x+7x}{2}=5x$，所以，得出中位线为4cm.

2．如图11，已知梯形$ABCD$，$AD\parallel BC$，$AE=EG=GB$，且$EF\parallel GH\parallel BC$，$AD=20$ cm，$BC=29$ cm，求EF、GH的长.

师：我们能不能把EF看作梯形$AGHD$的中位线？GH是不是梯形$EBCF$的中位线？能否应用中位线定理来计算？

生：设$EF=x$，$GH=y$，由中位线定理可得

$$\begin{cases}2x=20+y,\\2y=x+29\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=23\text{ cm},\\y=26\text{ cm}.\end{cases}$$

3．已知梯形$ABCD$，$AD\parallel BC$，E、F分别是AB、CD的中点，EF交BD于G，交AC于H.

求证：$GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

师：我们能不能根据题意画出图形，请同学们试试.

（生甲上黑板画出图12.）

师：图画得很正确．接着考虑GH与两底关系，能否应用中

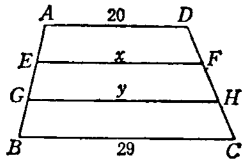


图 11

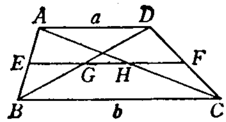


图 12

位线定理呢？EF 是梯形中位线，FG、EH 是不是 $\triangle BCD$、$\triangle ABC$ 的中位线呢？为什么？

生乙：EF 是梯形 $ABCD$ 中位线，所以 $EF \parallel BC$，当然 $EH \parallel BC$，又 E 为 AB 中点，因此，H 为 AC 中点，则 EH 为 $\triangle ABC$ 的中位线. 同理可证 G 为 BD 中点，FG 为 $\triangle BCD$ 的中位线.

师：很好！接着设 $AD=a$, $BC=b$, 能否求出 GH 呢？

生丙：
$$EH=\frac{b}{2},\ FG=\frac{b}{2},\ EF=\frac{a+b}{2},$$
$$GH=EH+FG-EF$$
$$=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2},$$
即
$$GH=\frac{1}{2}(BC-AD).$$

师：从刚才练习中，同学们都掌握了梯形中位线定理："梯形的中位线平行两底，并且等于两底和的一半."

五、布 置 作 业

1. 复习课本中关于梯形中位线性质及证明.

2. 课本习题(略).

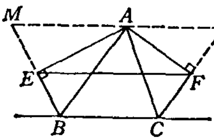
3. 补充题：(供学有余力的学生思考.)

如图，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A，作 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的外角平分线的垂线 AE、AF，垂足分别为 E、F，连结 EF. 求证:

(1) $EF /\!/ BC$;

(2) $EF=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

[提示: 延长 BE、CF 分别交过 A 平行 BC 的直线于 M、N, 证明 EF 是梯形 $BCNM$ 的中位线.]



(第 3 题)

教案说明

(1) 本节是定理教学课. 遵循定理教学的基本规律, 结合学生初步掌握的基本图形添线法, 和对三角形中位线等已有知识, 来考虑本节教案的结构.

组织学生讨论、富有启发的提问, 及时鼓励表扬和留心抓住训练学生独立思考的战机, 都是为体现教师为主导, 学生为主体的教学原则. 本节课就是带着这样的教学目的而设计教案的.

课堂教学中, 教师充分发挥主导作用, 精心设计教给学生科学的分析方法和利用转化的思想, 将梯形中位线转化为三角形中位线、平行四边形等问题, 借助已知来解决未知. 在整个教学过程中, 学生遵循教师富有思考的提问互相研究, 充分调动了学生的思维的积极性.

(2) 培养学生独立思考, 是数学教学尤其是几何教学的一项重要任务, 也是我们教学改革中不断探索的重要课题. 在教学中要尽量发挥学生的主体作用. 学生自己能看懂的, 就让学生自己看. 学生能自己解决的问题, 教师绝不包办代替. 课堂上积极

为学生创设思考问题的环境，给学生充分动手做、动脑想、动口说的机会. 本节课就是选择了相互讨论、启发诱导的启发式教学法.

基本图形添线法，是培养学生创造性的思维能力的好方法，它基本上能解决平面几何证题难的问题. 添辅助线证题中，为什么要添这样的线，而不添那样的线. 过去教师难讲清，学生难理解. 有了基本图形添线法，就解决了这个问题. 而且，还能进一步训练学生的思维，激发学生学习平面几何的兴趣. 特别对于发展学生的创造性思维能力十分有益. 本节课能有这样的效果，与基本图形添线法是分不开的.

(3) 培养学生辩证唯物主义的思想观点，也是我们数学教学的重要任务. 由三角形的顶点沿着平行于底边的直线运动，运动到某一定点时，就将三角形中位线转化为梯形中位线了. 反之，就将梯形中位线化归为三角形中位线. 用运动变化的观点研究问题，对相近概念的区别与联系，以及这些知识的产生、掌握、运用都会有深刻的认识. 尤其受已经找出的证题方法的启发，积极思维，寻求更新的证题方法，特别是从求同思维向求异思维发展上，有其独到之处. 在教师及时启发、表扬、鼓励之下，更激励了学生的积极思维，从而找到证题途径，得到了六种证题方法. 总之，教学成功的关键在于掌握教材，熟悉学生和采用灵活多变的教学方法.

梯形中位线定理证明方法较多，教学时可结合学生的实际情况，适当增删证明方法或分为两个课时完成.

相似多边形的应用

乐嗣康（浙江宁波师范学院）

作 者 简 历



乐嗣康　浙江宁波人，早年求学于上海大同大学电机系，1947年任奉化中学数学教师，1952年任鄞县第一中学副校长，1959年在宁波师院数学系工作，1977年退休．历任浙江省宁波市中学数学教学研究会副理事长、理事长，现任浙江省高师数学教育研究会顾问，宁波市中学数学教学研究会顾问，宁波教育学院兼职导师。

教学目的

让学生掌握相似多边形的概念、性质和判定；培养学生观察、判断能力以及思考和数学处理能力；通过对学生思考过程的指导，让学生从具体实物及其操作中抽象出数量与图形的关系，并将它应用到生产和日常生活中去．

教学过程

师：我们学了相似多边形的知识，和过去学习知识的目的一

样，除了为进一步学习奠定基础外，还要能将它应用到生产和生活中去．今天就来研究相似多边形的应用．

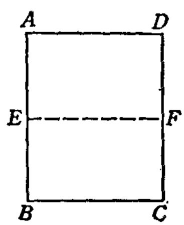
（教师随即拿出事先准备好的一叠16开的白纸，取其一张，朝着学生，并沿着长边对折起来，然后提问．）

师：从原来一张长方形的纸片，沿着长边对折成为两个较小的长方形纸片，这样大小不同的两个长方形之间有什么相同和不同的地方呢？

（学生开始思考，教师将这些16开白纸分发给每个学生，一人一张．）

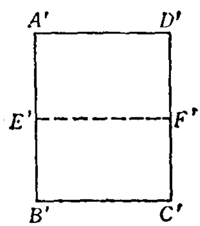
师：请同学们自己对折一下，先沿长方形的长边对折，然后摊开来，展平，进行观察．

（此时，同学们的思维通过教师提问和自己的操作，开始活跃起来．教师在同学们操作、观察的同时，把图1画在黑板上，并将长方形 $ABCD$ 和 $ADFE$ 的两张纸片剪下来贴在黑板的一端上，让全班同学明显可见．接着，教师又将事先准备好的另一叠长方形纸片（其长与宽之比是任意的，比如，长:宽＝2:1）分发给每个学生，一人一张，让学生进行对折、观察、比较其结果．教师在另一端黑板上画出图2，并同样贴上由此剪下来的大小不同的两张长方形纸片．学生通过自己的操作、观察、比较，情绪高涨，跃跃欲试，要求回答．）



$AB>AD$, $AE=EB$, $DF=FC$

图 1



$A'B'>A'D'$, $A'E'=E'B'$, $D'F'=F'C'$

图 2

生甲：我猜想，长方形 $ABCD$ 相似于长方形$ADFE$．而长方形 $A'B'C'D'$ 不与长方形 $A'D'F'E'$ 相似．

师：你是怎样猜出来的？

生甲：是比较出来的．判断两个长方形是否相似，只要看它们的长与宽之比是否相等即可，一看就知．

生乙：我是用刻度尺测量了这些长方形的长与宽后才判别出来的．我发现

$$\frac{AB}{AD}\approx 1.4,\quad \frac{AD}{AE}\approx 1.4,$$

所以 $\frac{AB}{AD}$ 等于 $\frac{AD}{AE}$ 的可能性是存在的．

而$\frac{A'B'}{A'D'}=2$，$\frac{A'D'}{A'E'}=1$，$\therefore\quad \frac{A'B'}{A'D'}\neq\frac{A'D'}{A'E'}$．

由相似多边形的定义，可知长方形 $ABCD$ 很可能相似于长方形 $ADFE$，而长方形 $A'B'C'D'$ 不相似于长方形 $A'D'F'E'$．

生丙：图 1 中长方形 $ABCD$、$ADFE$ 它们的各对应角都相等(90°)，而且它们的各对应边之比都近似地等于1.4，即各对应边成比例的可能性很大，所以它们很可能相似．而图 2 中的长方形 $A'B'C'D'$ 和 $A'D'F'E'$ 虽然各角都是 90°，但它们的对应边不成比例，所以它们不是相似形．

（全班同学，听了三位同学的发言，似乎说出了自己要想回答的话，心里很高兴，都满意地笑了．）

师：大家回答得都很好！观察和实际测量确实能解决我们这个具体问题．但是，我们学习数学不仅要解决这一具体问题，还要在观察、实验等形象思维基础上作进一步的分析，并用数学这个工具去论证其正确性，进行抽象、概括、推理，从而获得解决这一类问题的一般规律和方法．然后，以此为据，作广泛的应用．

现在请大家想一想，要使用上述方法获得的两个大小不同的长方形相似，这些长方形的长、宽之比是否一定？

（同学们从感性认识的基础上作进一步的分析、抽象，兴趣盎然，教室内气氛活跃，在自己的草稿纸上进行分析与论证．两、三分钟后，大家都先后举起手来要求回答问题．）

生丁：由图1，知 $AE=\frac{1}{2}AB\left(DF=\frac{1}{2}DC\right)$，要使长方形 $ABCD\backsim$ 长方形 $ADFE$，则必须使 $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AE}$ 成立，也就是使 $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{\frac{1}{2}AB}$，即 $\frac{1}{2}AB^2=AD^2$ 成立，所以必须使 $\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{1}$ 成立．

这个结论就是说，要使用上述方法获得的两个大小不同的长方形相似，则原长方形 $ABCD$ 的长与宽之比必须为 $\sqrt{2}:1$．

师：回答得很好！我对大家的学习表示满意．（同学们听了都面有喜色，处于高度兴奋状态．）现在，我们再来回顾前几天上的课．从相似多边形的定义可以看出，多边形的相似要有两个条件：(1) 对应角都相等；(2) 对应边都成比例，两者不能缺一．例如，长方形和正方形（如图2中的长方形 $A'B'C'D'$ 与 $A'D'F'E'$），虽然有各对应角相等的条件，但其对应边不成比例，这样的两个长方形不能相似；又如，一般的菱形，虽然具有各对应边成比例的条件，但对应角不相等，这样的菱形也不能相似．这一点千万要注意．

上面同学们已经证明了"一个长方形若沿着长边对折后与得到的小长方形相似，则长方形的长与宽之比必须是 $\sqrt{2}:1$．"这一命题的逆命题是："若一个长方形的长与宽之比是 $\sqrt{2}:1$，则沿着长边对折得到的小长方形必与原长方形相似"．大家想一想，它是否也成立？

（想了两、三分钟后，同学们几乎都举起手来．）

师：请同学们在自己的作业本上予以证明．

（几分钟后，同学们都放下了笔，教师请一位同学上黑板板演．）

生：如图1，由已知 $\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{1}$，$AE=\frac{1}{2}AB$.

$$\therefore\quad \frac{AD}{AE}=\frac{AD}{\frac{1}{2}AB}=2\cdot\frac{AD}{AB}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}.$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AE}.$$

又对应角都等于 90°，故对应角均相等.

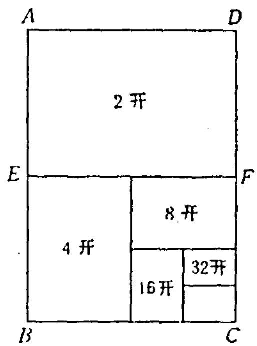
∴　长方形 $ABCD$∽长方形 $ADFE$.

师：由此可知，凡是符合这个条件且只有符合这个条件(长∶宽 $=\sqrt{2}:1$)，经沿长边对折，连续对折，所得到的一系列大大小小的长方形都是相似的.

生：这个结论有什么用处呢？

师：用处很大呢！举一个例子来说，造纸厂里第一次造出的长方形纸张，其长与宽之比必须是 $\sqrt{2}:1$，只有这样，它的对开纸(即二开纸，对裁而得)、四开纸、八开纸、十六开纸、三十二开纸等(用这样方法对裁出来的一切长方形纸张)都是相似的，如图3. 用这样裁得的一系列长方形纸张来印刷书本，则不仅简便、省纸，而且都很美观、实用，因而我国规定一般纸张的标准尺寸为 787 毫米×1092 毫米.

这个标准尺寸的长方形纸张，其长为 1092 毫米，宽为 787 毫米. 若长与宽之比值和 $\sqrt{2}$ 都取两个有效数字的近似值，这两个数可以认为近似相等. 至于两个近似数之间的误差，这可能是由于在装订各种本本时，为了整齐需要切边的缘故.



$AB:AD=\sqrt{2}:1$

图 3

同学们可以翻到课本的最末页，可以看到"开本 787×1092

1/32……”

这就是说，我们的数学课本是属于32开本的. 大家可以量一量课本的长与宽各是多少毫米?

（同学们都很快量了一下.）

生（众）：长是184毫米，宽是130毫米.

师：$\frac{184}{130}\approx 1.41\approx\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}$.
这说明课本的长与宽之比是符合所求得的相似条件的.

（同学们看到了课本末页的数据和自己量得的结果后，脸上都充满了胜利的喜悦和满意的微笑.）

师：很明显，造纸厂的纸张大小就是根据这个相似多边形的性质设计出来的. 全世界各国也都科学地作出了这个规定. 这就是我们正在学习相似多边形性质在造纸工业生产中的一个重要应用的例子.

学习数学和学习其他学科一样，除了为进一步学习奠定基础外，还要学会应用，为今后更好地参加四个现代化建设服务.

课外做下面一个练习题：

有长方形纸一张，其长、宽分别为 a、b，今沿长边 a 三折之（即将 a 三等分），得三个小长方形. 若欲使原长方形与小长方形相似（这样连续沿着折痕裁剪出来的一切长方形都相似），试问 a 与 b 之比应为多少?

若用这样长、宽之比的长方形作为画幅的大小、镜框的大小、信封的大小，你看看合适吗? 好看吗? 并根据你的设计裁剪出一个大小符合要求的长方形纸片来，并贴在练习本内.

教案说明

1. 课题的选择

选择以课本版权中“开本787×1092 1/32”为材料，以印刷厂造出的长方形纸张，其长与宽之比为 $\sqrt{2}:1$ 为依据，把它们作

为"相似多边形的应用",是考虑到数学学科也像其他学科一样,要使学生注意学以致用. 课本及其他书的"开本 787×1092 1/32"、"开本 850×1168 1/32" 等,许多读者(包括教师、学生)看到过不知多少次,但几乎没有人注意到其中的奥妙:它是以"一个长方形分成两个相等的长方形后,原长方形与每一个小长方形相似的充要条件是原长方形的长与宽之比为 $\sqrt{2}:1$" 作为依据. 尽管这一命题课本未曾出现过,但学过相似形的初中生都能独立地加以证明. 换句话说,将这一课题作为教学内容,既有应用又有理论,而其应用在于大量的却是平时视而不见的事实,因而具有较大的吸引力,其中的理论易为学生所接受. 这对调动学生的学习积极性,扩大知识面,培养理论联系实际,发展思维能力是会有好处的.

2. 要讲究教学方法与科学性

如果引导学生直接证明命题:"若两个长方形 $ABCD$、$ADFE$ 相似,则 $AB:AD=\sqrt{2}:1$",估计学生不会发生困难,而且还可节省时间. 但对初中生来说,教学效果自然比不上采用"教师先发给学生 16 开纸及长宽之比为 2:1 的长方形纸各一张,让学生自己操作、观察、比较、猜测,然后上升到理论证明"的方法. 学生通过丈量长方形的长宽来论述两个长方形相似的结论时,就需要正确处理近似与精确的关系,要处理好近似数运算问题,否则会犯科学性错误. 如果学生出现"从 $AB:AD\approx1.4$, $AD:AE\approx1.4$ 推出 $AB:AD=AD:AE$"的情况,教师应立即提醒全班学生,要看清"≈"号与"="号. 从上述两个近似等式,在理论上推不出这一精确等式,而只能得出"$AB:AD=AD:AE$的可能性是存在的"或"可能会有 $AB:AD=AD:AE$". 又在本文用到课本的"开本 787×1092",其中两个数都是具有三个、四个有效数字的近似数,因此当计算1092/787时,应按近似数相除的理论来处理. 若得出商为 1.39,当然符合近似数除法法则,但直观的结果与 $\sqrt{2}$ 的三个有效数字的近似值 1.41 有差距,不符合要求;若得出 1.4,不仅结果

的可靠性较强(两个数字均保证是有效数字,自然也不违背近似数除法法则),而且与 $\sqrt{2}$ 的两个有效数字的近似值 1.4 直观上相同,符合要求.顺便指出,如得出商为 1.388 甚至保留更多数字,是不符合近似数除法法则的.

经过三点的圆

王殿荣（内蒙古赤峰蒙中）

作 者 简 历



王殿荣　内蒙古宁城县人，1960年毕业于内蒙昭盟师专数学科，同年任赤峰蒙古族中学数学教师．1986年被评为内蒙古中学高级教师．现任赤峰蒙中数学教师，赤峰市中学数学教研会理事长，赤峰市数学学会副秘书长，内蒙古中小学数学教研会理事．

教学目的

（1）使学生理解"不在同一直线上的三点能确定一个圆"、"不存在经过同一直线上三点的圆"等重要知识．

（2）能熟练地作出三角形的外接圆．

（3）使学生进一步理解圆的定义，学会正确论证和应用，提高学生的逻辑思维能力，为进一步学习圆的其他知识、技能，特别是为学习"轨迹命题"、"轨迹相交法作图"作好准备．

教学过程

一、新课引入

师：请同学们考虑两个问题：

问题 1 已知两定点 A、B，以点 A 为圆心作圆，使圆经过点 B，此圆怎么作？

问题2 已知两定点A、B，以线段AB为直径作圆，此圆怎么作？

（让同学口答"已知"、"求作"、"作法"、"证明"这几个步骤.）

生甲：（问题1）已知：定点 A、B.

求作：以 A 为圆心，且过点 B 的圆.

作法：(1) 连结 AB；

(2) 以 A 为圆心，以 AB 为半径作圆，即为所求作的圆.

证明：A 为圆心，AB 为半径，B 在圆上，即圆经过点 B.

生乙：（问题 2）已知：两定点 A、B.

求作：以线段 AB 为直径的圆.

作法：(1) 连结 AB，取线段 AB 的中点 O；

(2) 以 O 为圆心，以 OA 为半径作圆，即为所求作的圆.

证明：O 为圆心，OA 为半径，则 A 在圆上；$OB=OA$，OB 也是半径，故 B 也在圆上．因为弦 AB 的中点 O 是圆心，所以AB是直径．即所作的圆是以线段 AB 为直径的圆.

[以上两小题是为了使学生进一步理解圆的定义和在"证明所作圆合乎题意"的内容和方法上，为学习经过两点的圆、经过三点的圆提供范例.]

二、新　　课

1．经过两点的圆

师：请同学们回忆前一节课后的练习题："求作经过两个已知定点的圆"的"已知"、"求作"、"作法"、"证明"是怎么写的？大家是否弄清楚了？

生：已知：两个定点 A、B.

求作：经过两个定点 A、B 的圆.

作法：(1) 连结 AB，作线段 AB 的垂直平分线 MN；

(2) 在直线 MN 上任取一点 O，以 O 为圆心，以 OA 为半径作圆，即为所求.

证明：因为 O 为圆心，OA 为半径，所以 A 在圆上.

又因为 O 在线段 AB 的垂直平分线上，而垂直平分线上的所有点到线段两端的距离相等，故 $OB=OA$，所以 B 在圆上.

所以，圆 O 是经过两点 A、B 的圆.

师：现在，请同学回答以下两个问题：

(1) 你是怎样想到上述作法的？

(2) 经过两个已知点 A、B 的圆有多少个？

（在学生回答后，教师把上述两个问题的结果作一个小结.）

师："经过两已知点 A、B 的圆的圆心在线段 AB 的垂直平分线上"（板书）. 由于经过两已知点 A、B 的圆，圆心可以取线段 AB 的垂直平分线上的任意点，圆心不确定，而半径也不确定，所以，"经过两个已知点 A、B 的圆有无穷多个，圆的大小是不确定的"（板书）. 这是很重要的结论，以后经常要用到，希望同学们记下来.

既然经过两已知点 A、B 的圆是不确定的，那么经过几个点的圆才是确定的呢？我们将"经过两个已知点 A、B"换成"经过三点 A、B、C"，这新增的第三点 C 可能与 A、B 不在同一直线上，也可能 A、B、C 三点共线. 下面，我们来研究这个问题.

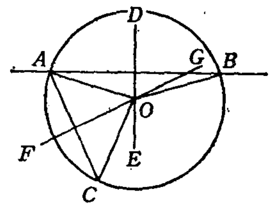
2. 经过三点的圆

师：请同学们考虑这样的作图题：求作经过不共线三点的圆.

已知：不在同一直线上的三点 A、B、C.

求作：圆 O，使它经过点 A、B、C.

分析：作圆可以先找圆心，前面已学过，经过两点 A、B 的圆的圆心在线段 AB 的垂直平分线上. 这垂直平分线如果设为 DE，那么 DE 上哪一点是既经过 A、B 两点又经过第三点 C 的圆的圆心呢？同学们想一下，圆心是否应该在线段 AC（或 BC 的垂直平分线上）呢？那么圆心怎样找呢？



生：圆心应在线段 AB 的垂直平分线 DE 与线段 BC 的垂直平分线 FG 的交点上.

师：要作经过不共线三点 A、B、C 的圆，找圆心时，把经过三点 A、B、C 分解为先要求经过两点 A、B，再要求经过两点 A、C，两次一结合. 问题就得到解决了. 这是数学上常用的思考方法. 请同学们把作法口答出来.

生：作法：(1) 作线段 AB、AC 的垂直平分线 DE、FG，它们有交点 O；

(2) 以 O 为圆心，以 OB（或 OA、OC）为半径作圆，即为所求.

（要求学生在纸上作图，并标注字母.）

师："证明"就是根据"作法"，从理论上说清所作圆确实经过不共线的三点 A、B、C.

因为 O 为圆心，OB 为半径，所以 B 在 $\odot O$ 上，即 $\odot O$ 过点 B. 又因为 O 在线段 AB 的垂直平分线上，而线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等，所以 $OA=OB$. 故 A 在 $\odot O$ 上，即 $\odot O$ 经过点 A. 同理，$\odot O$ 经过点 C. 因此，$\odot O$ 确实是经过不共线三点 A、B、C 的圆. 现在，请同学们考虑：经过不共线三点 A、B、C 的圆有几个？为什么？

生：经过不共线的三点 A、B、C 的圆只有一个.

师：这就得到了定理"过不共线三点决定一个圆"（板书）. 这

里的"决定"包含两层意思：一是能够作出一个圆；二是仅能作出一个圆．怎样证明这一个结论？

(1) 要证明"存在性"，说明能作出一个圆，这包含方才的"作法"、"证明"两部分的所有内容．

(2) 要证明"唯一性"，说明仅能作一个圆，这由于 AB、AC 的垂直平分线 DE、FG 有唯一的交点 O，从而圆心 O 是唯一的．进一步又知 $OA=OB=OC$ 半径是唯一的，所以，这样所作的圆是唯一的，"唯一性"得到了证明．

（为达到巩固、消化，教师请同学口述定理证明的全过程．）

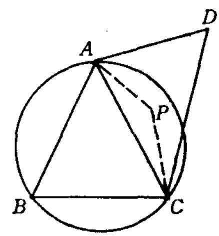
师：请同学们再考虑：如果三点 A、B、C 是在同一直线上，那么存在不存在经过三点 A、B、C 的圆？考虑一下圆心在哪里？

生：若 A、B、C 三点共线，线段 AB、BC、CA 的垂直平分线将平行而无交点，因而找不到圆心，于是不存在经过共线三点的圆．

（不共线三点能确定一个圆． 这里的"不共线"是极重要的条件，要再一次强调．学生心里还有一个悬念，不共线三点可以确定一个圆，那么三个以上的点呢？这要通过读课文去解决，课文里有三角形外接圆，多边形不一定都有外接圆等内容，一读就可以基本明白了．）

师：现在请同学们读"经过三点的圆"这节课文，要全部读完．重点是定理的证明以及老师未讲到的部分．

（读课文后，用"内含三角形"来纠正对于"内接三角形"的误解．用三角形外接圆、圆外、圆内各一点说明四个点或四个点以上未必在同一圆上，如右图所示．）



三、练习和应用

师：我们学会了定理"不共线三点能确定一个圆"有什么用呢？

可以用它作出三角形的外接圆．现在请在练习本上画出锐角三角形、钝角三角形、直角三角形各一个，每边长在2厘米以上，比赛一下，看谁最快画出它们的外接圆．

（学生画图，教师巡视、指导．）

师：画完后，请同学们观察一下，圆心的位置有什么特点？

生：直角三角形的外心在斜边的中点上；锐角三角形的外心在三角形内部；钝角三角形的外心在三角形外部．

师：画得较快的同学是不是每个三角形只画了两边的垂直平分线，用交点确定圆心O，画外接圆；而画得稍慢的同学是不是每个三角形都画了三边的垂直平分线，用交点确定圆心O，画外接圆？但这样的同学也有另外的收获，又重现了过去学过的"三角形三边的垂直平分线三线共点"这个事实．

我在黑板上画个圆，把圆心拭去，你们能找到圆心吗？怎样找？为了节省时间，你说一下怎样找圆心就行．试试看．

（学生回答略．）

师：我们学过的概念、定理要深刻理解，正确表述，请口答下列填空题和判断题，要把你填上的字或改正的字与原有的字句一起完整地读出．

1．填空题：

(1) 经过两点A、B，可作______个圆，其圆心在______．

(2) 经过不共线三点A、B、C可作______个圆，其圆心在______．

2．判断题：

(1) 过三点确定一个圆．

(2) 多边形的顶点都在圆内时，叫做这个圆的内接多边形．

(3) 以线段AB为直径可以作一个确定了位置和大小的圆．所以说，两点A、B确定一个圆．所以，推广到一般，可以说"两点确定一个圆"．

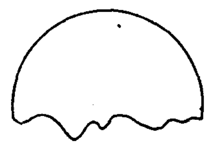
四、小　　结

师：请同学们说出本节课学会了哪些知识、技能．

生：(1) 不共线三点能确定一个圆；(2) 三角形外接圆的圆心就是三边垂直平分线的交点，可以通过作任意两边的垂直平分线而找到.

五、作　业

1. 论证"不共线三点能确定一个圆".
2. 任画一个直角梯形，再画出经过它的每三个顶点的圆.
3. 如图是圆形出土文物的残片，讨论如何找出它的圆心，量出它的半径.



4. 除了"不共线三点能确定一个圆"之外，你还知道哪些"确定圆的条件"？请在笔记本上开辟一个栏目，积累这方面的资料.
5. 再一次细读课文，并完成课文后的所有练习题. 完成个别题目有困难时，可以和同学讨论或问老师.

自我评述

(1) 圆是平面上最简单的封闭曲线，也是学生在初中学习的唯一的一种曲线. 圆的基本知识在生产和生活中有广泛的应用，是学生进一步学习和参加工作必须掌握的基础知识. 不共线三点确定一个圆，涉及到两种基本轨迹，即"圆本身是平面上与定点距离等于定长的点的轨迹"和"与两定点等距离的点的轨迹是这两点连结线段的垂直平分线". 要学好不共线三点确定一个圆，需用到"轨迹相交法"的基本思想，但这在学生头脑中还未形成概念，所以本课教学中要用"经过两点的圆的圆心在这两点连线的垂直平分线上"来铺垫，在"圆经过两已知点A、B"的基础上增加条件："圆又要经过第三点C"来突破对于"圆经过不共线三点A、B、C"的分析这一步的障碍. 最后通过欲求经过三点A、B、C，只须分解为过A、B两点与过B、C两点而达到渗透轨迹相交法思想的目的.

(2) 学生的新知识的获得与新技能的形成应从“最近生长点”发端. 本课新知识是以对圆的定义的深刻理解，以及对线段垂直平分线的性质的掌握作为必要条件的. 而对圆的定义及线段的垂直平分线性质的直接提问虽对新课有直接的效益，但无助于引发学生的兴趣，也无助于加深学生对此知识的理解程度，所以在本课中，以总结归纳学生怎样想到“经过两点的圆”的作法，来强化印象. 再者，学生对作图题的“证明”这一步骤，往往不予重视，一些学生甚至无从下手. 为此，本课教学中，在“作以A、B两点为直径两端的圆”，“作经过两点的圆”这些题目中，都强调“证明”这一步骤，为“作经过不共线三点的圆”的“证明”这一步骤提供范例和“最近生长点”. 有了充分的准备，“不共线三点确定一个圆”这一定理的证明就水到渠成了.

(3) 教师是把人类已知的科学真理创造条件转化为学生的真知，教学又是引导学生把知识转化为能力的一种形式. 因此，学生主动地学习须放在突出的地位. 在本课教学中，教师试图给学生学习当“导演”，在一些问题的启导下，由学生自己得出正确解答.

要使学生真正学到本领，在课堂上，不但要学生动脑，积极思维，还要动口、动手. 本节课安排了学生亲自动手作图的练习，用口述表达，还安排了作笔记，作课文的眉批等. 例如，记下“经过两点的圆的圆心在这两点连线的垂直平分线上”、“经过不共线三点A、B、C的圆是以线段AB、BC的垂直平分线的交点O为圆心，以OA(或OB、OC)为半径的圆”等等.

(4) 学生的学习，还要养成良好的学习习惯，这包括及时回顾所学的知识，使之形成知识“链”. 对所学到的数学方法、数学思想深入理解，变成自己解决实际问题的指南. 本节课在引导学生回忆自己“作经过两点的圆”的“作法”及“作经过不共线三点的圆”时的“分析”之后的回顾，就是着眼于这种学习习惯的培养.

和圆有关的比例线段

陈绍基（广东省华南师大附中）

作者简历



陈绍基　广东南海县人，1963年毕业于华南师范大学数学系，同年任华南师范大学附中数学教师．1988年被评为广东省中学高级教师．1987年被评为广东省优秀归侨教师．现任华南师范大学附中数学教师．

教学目的

(1) 通过学生自己猜想、分析、推理论证，得出相交弦定理及其推论．

(2) 在猜想、分析和推理过程中，让学生进一步熟悉和运用变动的观点、特殊与一般的观点去观察、研究几何图形的性质，使学生养成用辩证唯物主义的观点分析和解决问题的习惯．

(3) 通过对相交弦定理的提出、研究与推广的过程，使学生掌握学习圆幂定理的基本思想方法．

教学过程

一、问题的提出

问题1 圆的两弦的位置关系有几种情形?

学生可能只说出平行与相交两种情形.

问题2 圆的两弦相交有几种情形? 会不会出现既不相交又不平行的情形?

引导学生得出以下结论:若圆内两条弦不平行,则有 (1) 两弦相交,交点在圆内(图1); (2) 两弦相交, 交点在圆上(图2); (3) 两弦的延长线相交,交点在圆外(图3).

(为推广相交弦定理作准备,故把图1~3画在黑板上.)

问题3 圆心是圆内的点中最特殊的点,若圆的两弦交点P与

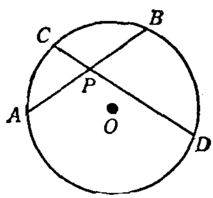


图 1

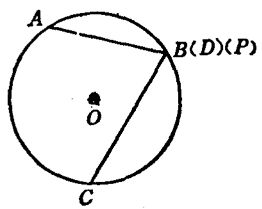


图 2

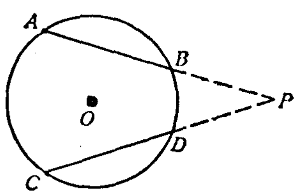


图 3

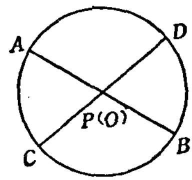


图 4

圆心 O 重合，则交点 P 内分两弦所得四条线段有何关系(图 4)?

学生首先是发现四条线段都相等，即 $PA=PB=PC=PD$. 可以继续问学生：比 $\frac{PA}{PD}$、$\frac{PC}{PB}$ 有何关系?(为过渡到P为圆内任一点，P 内分 AB、CD 所得四线段成比例作准备.) $\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}=1$, 即 PA、PD、PC、PB 成比例.

问题 4 一般地，圆内的两条弦相交，被交点分得的四条线段并不都相等(可由图 1 直观看到)，而四条线段成比例关系是否仍保留呢?

利用图 1，让学生自己去猜想与证明，容易得出点 P 内分两弦所得四条线段仍然成比例.

二、命题归纳与证明

至此，相交弦定理的雏形已经显示出来，可引导学生归纳成命题的形式并由学生自己给出证明.

"圆内的两条弦相交，被交点内分所得的四条线段对应成比例."

已知：如图 5，$\odot O$ 的两条弦 AB、CD 相交于圆内的一点 P.

求证：$PA:PD=PC:PB$.

略证：连结 AC、BD，则

$\triangle APC\backsim\triangle DPB$, $PA:PD=PC:PB$.

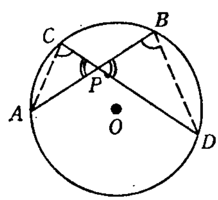


图 5

教师还应指出，连结 AD、BC 也能证得同样结论. 并明确提出本节课题：PA、PD、PC、PB 就是与圆有关的比例线段，本节课研究的主要对象是：与圆有关的比例线段.

[课题是通过教师不断提出问题，引导学生运用旧知识观察、分析而提出的. 所以，课题的引入比较自然. 把教师讲授定理改为

师生共同探求定理，注意发挥学生学习的主体作用，就能充分调动学生学习的积极性.]

三、相交弦定理的分析、研究

问题 5 上述结论：

"圆内的两条弦相交，被交点分得的四条线段对应成比例"中，"对应成比例"的表述是比较粗糙的，因为不用字母把线段表示出来，就不容易看出线段的对应关系. 怎样才能使定理的表达更为精确呢？

显然，如把问题量化，将比例式化为两线段的积(理解为两线段长的积)相等的形式，把定理改写成：

"圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等" 就比较精确了，这就是"相交弦定理".

问题 6 若把 P 看作定圆 O 内一定点，AB 看作圆 O 内过点 P 的动弦，圆 O 的弦 CD 相对固定，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 是否仍然成立？

(这里强调了 $\odot O$ 是定圆，P 是 $\odot O$ 内一定点，目的是使学生在下面探求定值时注意这些条件.)

显然，由于在上述问题 4 的证明中，$\odot O$ 的弦 AB、CD 是任意的，因此，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 成立，表明"过定圆内一定点 P 的弦，被 P 点分成的两条线段长的积为一个定值."

问题 7 同学们能把这个定值找出来吗？

提出问题后让学生充分思考，因为这时候学生的积极性已经调动起来了，特别活跃. 经过一番思考，如果学生还没有找到定值，可作以下两点提示：

提示 1：被探求的定值是两条线段长的积，它与定理中的哪些条件有关？就是说，定理中有哪些线段的长是确定的？

提示 2：虽然过定点 P 的弦有无数多条，然而在这众多的弦中

有没有一些长度比较特殊的弦(暗指过点 P 的最长或最短的弦)，能否通过它们去寻找定值?

只要学生注意到，过 P 的圆的直径或过 P 垂直于 OP 的弦，定值就容易找到了.

分析如下:

如图 6, 考察动弦 AB, 若 AB 过$\odot O$ 的圆心 O, 则 AB 为过点 P的最长的弦，设 $\odot O$ 的半径为 R, 则

$$PA\cdot PB=(R-OP)(R+OP). \qquad (*)$$

定值已初露眉目.

考察过点 P 的弦中最短的弦(图 7)，AB 为过 $\odot O$ 内一点 P 的直径，CD 为过点 P 且垂直于 AB 的弦，显然，由垂径定理和相交弦定理，应有

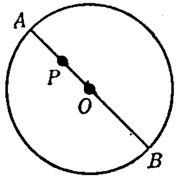


图 6

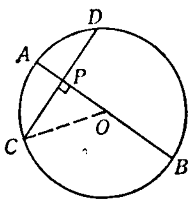


图 7

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD=\left(\frac{1}{2}CD\right)^2$$
$$=OC\ -OP^2$$
$$=R\ -OP^2. \qquad (**)$$

由于 $\odot O$ 是定圆，P 为 $\odot O$ 内一定点，故 $\odot O$ 的半径 R 与 OP 的长为定值. 设 $OP=d$, 比较(*)与(**)，结论是一致的，即

$$PA\cdot PB=(R-d)(R+d)$$
$$=R^2-d^2$$

为定值.

于是，相交弦定理可进一步表述为：

“圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积为一定值，它等于圆的半径与交点到圆心距离的平方差.”同时，由(**)可直接得到相交弦定理的推论：

“如果弦与直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项.”即 $PC^2=PD^2=PA\cdot PB$.

至此，学生对相交弦定理的理解已经得到深化，不仅从定性方面也从定量方面对相交弦定理加深了认识.

[对相交弦定理的分析、研究是与把学生已证明的命题逐步演变的过程同步进行的，这样做是顺理成章的，学生不会感到突然.在这个过程中，分别从定性与定量两个不同的侧面去揭示相交弦定理的实质，加深了学生对定理的理解，并在探求定值的过程中，学到了从特殊到一般的思想方法.]

四、练 习 巩 固

1. 如图 8，$AP=3$ 厘米，$PB=5$ 厘米，$CP=2.5$ 厘米. 求 CD.

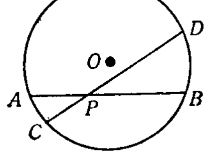


图 8

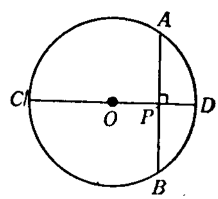


图 9

(练习目的：检查学生对定理的理解是否准确，会不会把定理理解成 $PA\cdot PB=PC\cdot CD$，或把求得的 PD 长误认为 CD 的长.)

2. 如图9，O 是圆心，$OP\perp AB$，$AP=4$ 厘米，$PD=2$ 厘米. 求 OP.

(练习目的：检查学生对相交弦定理理解的程度.)

学生解第 2 题有如下四种解法：

解法一：连结 OA，则 $\triangle OAP$ 为直角三角形．设 $\odot O$ 的半径为 R，

则 $OA=R$，由勾股定理，有

$$R^2=(R-2)^2+4^2, \qquad \text{解得 } R=5.$$

$$\therefore \quad OP=OD-PD=R-PD=3(\text{cm}).$$

（用这种解法的学生，对相交弦定理还不会运用，故需要引辅助线，借助勾股定理去解决问题．）

解法二：设 $\odot O$ 的半径为 R，由 $PC\cdot PD=PA^2$，得 $PC=8$．

$$\because \quad 2R=CP+PD=10, \ \therefore R=5, \ OP=3(\text{cm}).$$

（用这种解法的学生，对相交弦定理已经理解和会用，但还不会应用定值去解决问题．）

解法三：设 $\odot O$ 的半径为 R，由 $R^2-OP^2=PA^2$，得

$$R^2-(R-2)^2=4^2, \text{故 } R=5. \ \therefore \quad OP=3(\text{cm}).$$

（用这种解法的学生已经理解和会用定值了．）

解法四：设 $\odot O$ 的半径为 R． $\because \quad R=OP+2$，

$$\therefore \quad (OP+2)^2-OP^2=4^2. \ \therefore \quad OP=3(\text{cm}).$$

（这样解题的学生不仅真正理解和会用定理，而且还注意了解题技巧．）

教师总结讲评，着重给学生指出：

(1) 与圆有关的比例线段是指定圆内被定点 P 分两弦所得四条线段对应成比例．

(2) 定圆的任一弦被定点分得两线段长的积为定值，这个定值与点 P 的位置有关，对圆内不同的点 P，一般来说，定值是不同的，即这个定值是相对于定点 P 与定圆 O 而言的．

五、相交弦定理的推广

问题 8 若圆的两条弦相交于圆上一点 P，如图2，这时，B、D、P 三点重合，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 是否仍然成立？

把 PB、PD 的长度看作零，上式仍成立.

问题9 若圆的两条弦的延长线相交于圆外一点 P，如图 3，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 是否仍然成立?

让学生自己猜想，联系点P 在圆内的情形得出肯定的回答，再利用图 3 自己加以证明.

问题10 能否将点 P 外分两弦 AB、CD 的情况叙述成定理的形式?

"圆的两条弦的延长线相交于圆外一点，各弦及其延长线被交点外分成的两条线段长的积相等."

问题11 PBA、PDC 是 $\odot O$ 的割线，怎样把上述定理用割线来表达?

"从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等."这就是"割线定理".

思考题1：P 为 $\odot O$ 外一点，过 P 向 $\odot O$ 引两条割线 PAB 与 PCD，若把 PAB 看作动割线，PCD 相对固定，把切线看作割线的特殊情形(即割线的极限位置，这是对学生所采用的不严格的通俗说法)，会有什么结论? 若把割线 PAB、PCD 都看作动割线，又会有什么结论?试证明你的结论.

思考题2："割线定理"中，"两条线段长的积"是否也是一个定值?这个定值是什么?试证明你的结论.

(这是课外思考题，目的是让学生发现"切割线定理"和"切线长定理"实际上是割线定理的特例.)

[问题8、9 与"课题的提出"部分：圆的两条弦相交，交点在圆内、交点在圆上，两弦的延长线相交，交点在圆外三种情形前后呼应，使学生对相交弦定理的探讨的结构比较完整、尤其重要的是在定理的研究过程中，向学生揭示了事物是在不断变化发展与事物之间的内在联系的事实，让学生接受辩证唯物主义思想的熏陶，使学生认识到学习每一个新的定理都要善于探究它与其他定理之间

的内在联系，还要考察定理是否可以推广．课外思考题与课堂教学内容紧密配合，为学生在课堂之外深入研究问题提供素材，为学生开辟更为广阔的学习天地创造条件．]

在学习本节内容和完成思考题的基础上，可以把相交弦定理、割线定理、切割线定理和切线长定理归纳总结为"圆幂定理"："过一定点P对某定圆$\odot(O, R)$任作一割线PAB，交该圆于A、B两点，则自定点至两交点的两条线段的长的积是常数$PA\cdot PB=|R^2-d^2|$，其中d为定点P到圆心O的距离.

若P在圆内，$d<R$，则该常数为R^2-d^2；

若P在圆上，$d=R$，则该常数为0；

若P在圆外，$d>R$，则该常数为d^2-R^2.

（经过对几届初三学生的数学教学实践说明，这样做对学习起点比较高的学生是完全可能的，课堂气氛比较活跃，教学目的可以达到；课外思考题学生也能完成，教学效果是比较好的．对于学习起点比较低的学生，可考虑把这节课分为两节课的内容去进行．）

教案说明

"和圆有关的比例线段"是初中几何第二册第七章"直线和圆的位置关系"的最后一节，它的主要内容是：相交弦定理及其推论，切割线定理及其推论（即割线定理）．如果把圆内两弦相交（或圆的两弦的延长线相交）的交点看作可以在平面上变动，并把圆的切线看作当圆的割线变动时的极限位置，则这些定理可以归纳为一个更一般的定理（圆幂定理）："过一定点对某定圆作任一割线，交该圆于两点，则自定点至两交点的两条有向线段之积是常数．"设定点为P，定圆为$\odot(O, R)$，作割线与$\odot O$的两交点分别为A、B，则所说的常数为$p=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$，其中$\overline{PA}$、$\overline{PB}$为有向线段，常数$p$叫做点$P$对于$\odot O$的幂。

当点 P 在 $\odot O$ 的外部时(图 8),p 值为正,它等于自P向 $\odot O$ 所引切线 PC 的长的平方;

当点 P 在 $\odot O$的内部时(图 9), p 值为负, 它的绝对值等于在 $\odot O$ 中过 P 的最小弦 EF 的长的一半的平方;

当 P 在 $\odot O$ 上时(图 10), 则 p 值为零.

无论何种情形,p 值均可以表示为 $p=PO^2-R^2$.

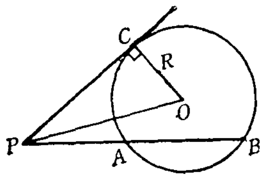


图 8

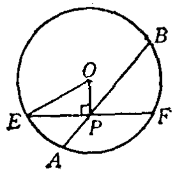


图 9

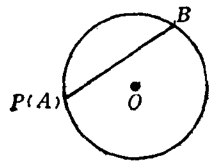


图 10

全国通用教材初中几何不讲"圆幂定理",只讲"圆内的两条相交弦,被交点分成的两条线段长的积相等"."从圆外一点引圆的两条割线, 这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等". 至于两条线段长的积是什么就不去研究了. 这样做, 从学生接受知识的角度上来看,无疑起了化繁为简、分散难点的作用. 然而从初中学生目前状况来看, 相当一部分学生不会用变动的观点去观察和研究几何问题,而往往是孤立的、静止的去看待几何图形的性质, 缺少用辩证唯物主义的观点去分析和解决问题的习惯. 故从帮助学生建立完整的知识结构,从训练和培养学生的逻辑思维,推广概括能力的角度上来看,不能不说是一个缺陷.

为了弥补上述缺陷,我作了以下的安排:

(1) 把教材内容适当调整. 通过相交弦定理的教学引伸出圆幂定理, 把定理中的常数 p 看作线段长的积,则 p 恒为正值, $p=|PO^2-R^2|$. 从而避开了有向线段的概念,也不讲点 P 对 $\odot O$ 的幂, 只是帮助学生把这节课的内容最后总结归纳为以下定理: "过

一定点P对某定圆 (O, R)任作一割线，交该圆于两点，则自定点到两交点的两条线段长的积是一个常数p，$p=|PO^2-R^2|$.”也把它叫做圆幂定理．这样做，既不增加学生的学习负担，又能让学生了解定理之间的内在联系，使学到的知识比较完整．

(2) 改进教学方法．设计一连串由浅入深、有启发性的思考题，充分调动学生的学习积极性，放手让学生自己去猜想和探索，并通过学生自己进行逻辑推理得出圆幂定理的结论．

“$ab=cd\pm ef$”类命题的证题规律

倪新球（江西省抚州市一中）

作者简历



倪新球　江苏太仓人，1960年毕业于北京航空学院飞机设计系．先后在江西共产主义劳动大学地质分校、江西地质学院、江西地质干训班等大专院校任教，1978年任江西抚州一中数学教师．1987年被评为中学高级教师．1979年至1988年均被评为市先进个人，1987年被评为抚州地区优秀知识分子．现任抚州一中数学教师，数学教研组副组长，抚州市数学中心组组长，抚州地区数学学会理事．

教学目的

在学生掌握应用相似三角形中的比例线段来证明等积线段的基础上，掌握“$ab=cd\pm ef$”类命题的证题规律．

教学过程

一、复习检查

师：我们先看下面的题目：（出示小黑板.）

在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交外接圆于D，交BC于E（图1）.

求证：(1) $AB\cdot AC=AD\cdot AE$；

(2) $BD^2=AD\cdot DE$；

(3) $BE\cdot CE=AE\cdot DE$.

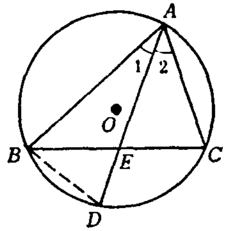


图 1

请三位同学到黑板上指着图形，口述证明关键.

生甲：利用$\triangle ABD\backsim\triangle AEC$证得(1).

生乙：利用$\triangle ABD\backsim\triangle BED$证得(2).

生丙：利用$\triangle BED\backsim\triangle AEC$（或直接用相交弦定理）证得(3).（要求学生写出证明过程.）

师：请同学们总结一下证明等积线段$a\cdot b=c\cdot d$的基本思路.

生：(1) 把等积线段式写成比例线段形式；

(2) 添加适当的辅助线"造出"两个可能相似的三角形，使要证的比例线段恰是这两个可能相似的三角形的对应线段；

(3) 证明这两个三角形相似.

二、提出问题

师：在上题的条件下，如何求证：

(1) $AD^2=BD^2+AB\cdot AC$；

(2) $AE^2=AB\cdot AC-BE\cdot CE$.

同学们观察一下这种类型题目的形式与过去熟悉的证明两个线段的积相等的题目形式有什么异同？这里，不是简单的两个线段的积相等，而是两个线段积的代数和与另外两个线段的积相等的

问题.

我们先来分析(1)的证题途径.

由于等号左边是 AD^2，即 $AD\cdot AD$. 如果能把等号右边的 BD^2 化成 $AD\cdot$□；$AB\cdot AC$ 化成 $AD\cdot$⬚，则 $BD^2+AB\cdot AC$ 即为 $AD\cdot$(□+⬚)(提取公因式 AD). 因此，只要(□+⬚)恰好也等于 AD，则此题便得证. 所以，问题的关键是转化为在 AD 上找一点，这点必须满足两个条件：一是必须在 AD 上；二是满足 $BD^2=AD$ ×□ 及 $AB\cdot AC=AD\cdot$⬚.

若把上述等积形式化成比例形式：

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{□} \quad 及 \quad \frac{AB}{AD}=\frac{⬚}{AC}.$$

这就回到过去熟悉的证明两个线段的积相等的问题，刚才同学们在复习检查中已完成. 现在的问题是 □ 与 ⬚ 中究竟应填什么呢？

三、分 析 思 考

师：根据已学过的两个线段的积相等的证明，不妨设 AD 上取一点 E，在 □ 中填 ED，而在 ⬚ 中填 AE. 于是可得下面的简单思路图：

$$AD^2=BD^2+AB\cdot AC$$

$$\Big\Updownarrow \text{AE 或 ED} \qquad \Big\Updownarrow \text{ED 或 AE}$$

$$AD\cdot□+AD\cdot⬚=AD\cdot(\overbrace{□+⬚}^{AD})=AD^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{□} \qquad \frac{AB}{AD}=\frac{⬚}{AC}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\triangle ABD\backsim\triangle BED \qquad \triangle ABD\backsim\triangle AEC$$

$$\therefore \quad BD^2+AB\cdot AC=AD\cdot DE+AD\cdot AE$$

$$=AD(DE+AE)=AD^2.$$

请同学们用同样的方法，说说第(2)题的简单思路图.

(教师根据学生口述板书.)

$$AE^2=AB\cdot AC-BE\cdot CE$$

$$\quad\ \ \|\qquad\qquad\ \|\qquad\qquad\overbrace{\qquad\quad}^{AE}$$

$$AE\cdot\boxed{AD}-AE\cdot\boxed{ED}=AE\cdot(\boxed{AD}-\boxed{ED})=AE^2$$

$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

$$\frac{AC}{AE}=\frac{\boxed{AD}}{AB}\qquad\frac{CE}{AE}=\frac{\boxed{ED}}{BE}$$

$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

$$\triangle ABD\backsim\triangle AEC\qquad\triangle AEC\backsim\triangle BED$$

$$\therefore\quad AB\cdot AC-BE\cdot CE=AE\cdot AD-AE\cdot ED$$

$$=AE(AD-ED)=AE^2.$$

四、练　　习

1. 如图 2，在 $\triangle ABC$ 之外接圆中，$\angle A$ 所对弧之中点为 D，AD、BC 相交于 E，求证：$AD^2=BD^2+AB\cdot AC$.

2. 如图 3，在圆内接四边形 $ABDC$ 中，若 $BD=DC$，求证：$AD^2-BD^2=AB\cdot AC$.

3. 如图 4，若 $\triangle DCB$ 为内接于圆O的等腰三角形，A 是优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上任一点，求证：$AD^2=BD^2+AB\cdot AC$.

4. 如图 5，若 $\triangle DCB$ 为内接于圆 O 的等边三角形，A 是 $\overset{\frown}{BC}$ 上任一点，求证：$AD^2=BD^2+AB\cdot AC$.

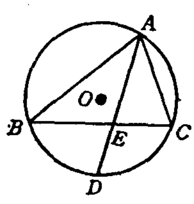


图 2

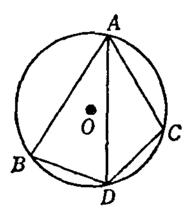


图 3

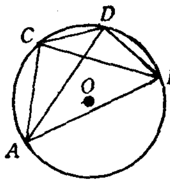


图 4

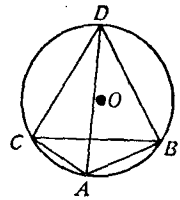


图 5

生:(略作思考后几乎同声回答)它们是同一个问题.

师:是的，只是用了不同的方式表达，或是图形的位置有所变化,但实质上是同一个问题，因此，证明思路是一样的.

五、问 题 的 深 入

师:我们再来看下面的问题:如图 6，从直径 AB 的两端在同侧作两弦 AC 和 BD 相交于 E. 求证:$AB^2=AC\cdot AE+BD\cdot BE$.

此题的简单思路图如下:

$$AB^2=AC\cdot AE+BD\cdot BE$$

$$AB\cdot\square+AB\cdot\square=AB\cdot(\overbrace{\square+\square}^{AB})=AB^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\square}{AE}\qquad\frac{BD}{AB}=\frac{\square}{BE}$$

怎样将线段 AB 分成两个线段的和呢?

生:要使 $\square+\square=AB$, 即要在 AB 上找一点 F, 使点 F 必须满足两个条件:一是在 AB 上;二是使

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\square}{AE}\quad 及\quad\frac{BD}{AB}=\frac{\square}{BE}.$$

师:由于 AC、AB 分别是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的长直角边和斜边,因此 $\square$ 和 AE 也必须是某一直角三角形的长直角边和斜边,即以 AE 为斜边作一直角三角形,使一条直角边在 AB 上. 能找到吗?

生:过 E 作 AB 的垂线,垂足即为 F, AF 为 $\mathrm{Rt}\triangle AFE$ 中的

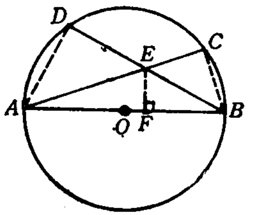


图 6

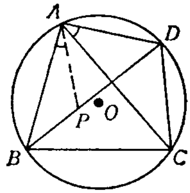


图 7

直角边，AE 为斜边.

师：解决此题的关键就是添辅助线 EF，此题难就难在想不到要添这条辅助线，但是同学们并没有盲目地添辅助线，而是自己通过分析得出来的. 这是因为你们掌握了这类命题的证题规律，掌握了用框框分析问题的方法.

现在再请同学们做练习：证明托勒密定理："圆内接四边形两双对边乘积的和等于对角线的乘积."

师：请同学们写出已知、求证，并分析解题思路.

生：已知：如图 7，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O.

求证：$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

右边：$AC\cdot BD=AC\cdot(\overbrace{\text{□}+\text{⬚}}^{BD})=AC\cdot\text{□}+AC\cdot\text{⬚}$,

若能证得

$AB\cdot CD=AC\cdot$ □及 $BC\cdot AD=AC\cdot$⬚，且 □+⬚$=BD$,

则问题就解决了. 所以关键在于找到点 P，使它满足两个条件：一是在 BD 上；二是使 $AB\cdot CD=AC\cdot$□ 及 $BC\cdot AD=AC\cdot$⬚，即 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\text{□}}{CD}$ 及 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\text{⬚}}{AD}$.

师：对！要得出两个式子，这就必须"造出"一个三角形来与 $\triangle ACD$相似，而这个三角形的一条边是AB，另一条边在BD上. 于是得出辅助线必然是过 A 作 $\angle BAP=\angle DAC$ 交 BD 于 P. 因此，在 □ 中填 BP，在 ⬚ 中填 PD. 请同学们说出简单思路图.

生：简单思路图是

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & \| & & \| \\ AC\cdot\square & + & AC\cdot\square & = & AC\cdot(\overbrace{\square+\square}^{BD}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \frac{AB}{AC}=\frac{\square}{CD} & & \frac{BC}{AC}=\frac{\square}{AD} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \triangle ABP\backsim\triangle ACD & & \triangle APD\backsim\triangle ABC & & \end{array}$$

师：对！这样分析后，同学们对这一个题目的证明思路就明确了，详细的证明请同学们课后补上.

六、小　结

师：求证两个线段积的代数和等于另外两条线段积的问题，实际上仍沿用已熟悉的证明线段乘积相等的基本思路. 不过，过去是证一对三角形相似，现在要先后证两对三角形相似. 问题的关键是通过观察、分析，找到将一线段分成两条线段的点. 这点必须同时满足两个条件. 添置辅助线，求出由这两个条件所限制的点，那么问题就解决了.

七、布 置 作 业

1．课本上练习（略）.

2．补充题：已知$\triangle ABC$的$\angle A$平分线交对边于D，求证：$AD^2-AB\cdot AC=BD\cdot CD$. 应用框框分析方法，找出证题思路，并写出证明格式.

自 我 评 述

(1) “$ab=cd\pm cf$” 类命题的证明是几何中较难的，多数情况下，书上会给出提示. 例如托勒密定理的证明，书上的提示是：设法在BD上取点P，使$AB\cdot CD=AC\cdot BP$. 学生就问：为什么要找

这样一点 P？如果没有这个提示，我怎么能想到走这一条路？在讲解难度较大的题目时，常常要添置辅助线．实际上，辅助线添对了，这道题也就解决了．学生常常会问：为什么要添这条辅助线？你怎么想到添这条辅助线的？说明学生并不满足于别人硬塞给他的“提示”，而要求提高能力．因此，作为一个教师，不仅仅要教给学生这样做，更重要的是要告诉学生为什么要这样做，启发学生自己“上路”．也就是说，要教方法，交“钥匙”，提高学生的能力，使学生用这些方法和“钥匙”，自己去打开知识的宝库，这是设计这堂课的指导思想．

(2) 这堂课的最大特点是把代数中的提取公因式巧妙地运用到几何中来．在讲课时，□ 是用红粉笔画的，□ 是用绿粉笔画的，学生听课后诙谐地取名为“框框法”，想起框框，就想起提取公因式；想起提取公因式，就想起要把一条线段一拆两．

(3) 这堂课的第二个特点是新课题和旧知识的联系很自然．证明两线段积的代数和等于另外两线段积的问题仍归结为过去已熟悉的证明等积线段的问题，只不过由过去的证明一次三角形相似变为证明两次三角形相似而已．

交轨法作图

张晓林（安徽省芜湖一中）

作 者 简 历



张晓林，安徽省芜湖市人，1963年毕业于安徽师范大学数学系，分配到芜湖一中任教，曾任芜湖一中数学教研组组长，芜湖市校际数学教研组副组长，芜湖市数学学会第三、四届理事会常务理事、副秘书长等，1987年被评为中学高级教师.

教 学 目 的

(1) 让学生掌握交轨法作图的一般方法和步骤，从而培养学生分析、探索和解决问题的能力.

(2) 经过范例的讲练和课堂练习，使学生进一步牢固地掌握六个基本轨迹.

(3) 培养学生用数学语言准确而完整地叙述和书写交轨法作图的能力.

教学过程

一、提出问题，设置探索的情境

师：同学们，筑路工人在筑路时遇到了这样一个问题：

如图1，有两段直路 l_1 和 l_2，它们的位置已经测定，需要筑一段半径为 R 的圆弧形道路把它们连结起来，你能帮助工人叔叔解决这个问题，并在图纸上准确地画出这段圆弧吗？

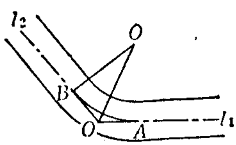


图 1

（学生议论纷纷.）

师：前面，我们学习了点的轨迹的定义及六个基本轨迹，我们能否用这些知识来解决今天的问题呢？

[提出实际问题，引出矛盾，能激发学生的学习兴趣，使他们进入积极思维状态，为新课的教学设置一个较好的情境.]

二、引导学生积极思维，动手、动脑获得新知

师：要解决这个实际问题，首先我们能不能把它归纳、抽象为一个纯数学问题？

生：（思考片刻）延长 l_1 和 l_2 相交于点 O，得 $\angle AOB$. 这样，要解决的问题就是：已知 $\angle AOB$，求作半径等于已知长 R，且与 OA、OB 都相切的一个圆.

师：归纳得很好.

[数学教学的任务之一就是要引导学生逐步学会把实际问题转化为纯数学问题加以研究. 这里引导学生进行归纳和抽象，对学生数学方法的掌握及解决实际问题能力的培养是有益的.]

师：这是什么类型的几何问题？求作应满足什么条件的几何图形？

生：几何作图问题．求作与$\angle AOB$两边都相切，且半径等于R的圆．

师：所要求作的圆的半径R已经知道了，要作这个圆还差一个什么条件？

生：确定圆心的位置．

师：回答正确．找到了解题的关键．

[对学生经积极思维，迅速找到解决问题的突破口及时肯定，才能使学生的注意力高度集中，思维活动继续处于兴奋状态．]

师：要确定所求作圆的圆心(点)，先应了解该圆心(点)应具备哪些条件？请同学们思考、讨论，看哪位同学的答案正确、完整．

生：该圆心要同时具备两个条件：到已知$\angle AOB$的两边距离相等；到已知$\angle AOB$一边OA(或OB)的距离等于R．

师：符合第一个条件的点的轨迹是什么？

生：$\angle AOB$的平分线．

师：符合第二个条件的点的轨迹是什么？

生：平行于$\angle AOB$的一边OA(或OB)并与这边距离等于R的两条直线．

(引导学生发现两直线中的一条在角外，不合题意，应舍去．)

师：我们所要求的圆心(点)在哪儿呢？

生：两个轨迹的交点O'就是所求作的圆的圆心．

师：为什么这两个轨迹的交点O'就是所求的圆心呢？(稍作停顿，使学生的思维活动能与教师的讲述同步进行．)因为在第一个轨迹上的点都符合第一个条件，在第二个轨迹上的点都符合第二个条件，所以两个轨迹的交点(也就是公共点)必同时符合两个条件，故交点O'就是所求作的圆的圆心．

[对于关键结论或较难准确回答的问题，教师采用自问自答的方式讲授，这样既突出了教材的重点，又解决了疑难问题．此处亦渗透集合、交集等数学思想，有利于学生进一步学习数学知识．]

师：矛盾既已解决，请同学们把本题的作法写在课堂练习本上，请一位同学上来板演.

生：作法：

(1) 作 $\angle AOB$ 的平分线 OC.

(2) 作直线 $DE \parallel OA$，并且使 DE 与 OA 的距离等于 R，DE 与 OC 交于点 O'.

(3) 以 O' 为圆心，R 为半径作 $\odot O'$. $\odot O'$ 就是所求作的圆(图 2).

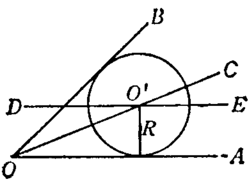


图 2

[让学生动脑、动手进行练习，不仅能达到巩固所学的知识，而且能进行准确、完整使用数学语言能力的训练.]

师：我们刚才共同研究的问题就是课本上的内容. 请把你们写的作法与课本上的作法进行对比和修正.

[经常指导学生自觉地独立阅读课本，是教学中必不可少的教学环节.]

师：现在，我想每位同学都能帮助工人叔叔在图纸上准确地画出这段圆弧了.

(教师小结)如果一个作图问题的解决，可以归结到要确定某一个点的位置，那么这个作图问题就可以利用点的轨迹来解. 而确定平面上一个点的位置，一般需要两个条件，这时我们可分别求出适合这两个条件的点的轨迹，两个轨迹如果有交点，这一点就是所要确定的点. 像这样应用两个轨迹的交点来确定点的位置，从而作出适合于题设条件的图形的方法叫做交轨作图法.

(在学生实践的基础上，点出本节课题并板书.)

师：用交轨法作图，一般所要作的不一定是轨迹的全部，而是要根据实际情况作出某一部分. 同学们能从上题的作法中看出吗？

生：如平行于 $\angle AOB$ 一边 OA，且与 OA 的距离等于 R 的直

线，只取 $\angle AOB$ 内部的一条.

师：很好！观察敏锐，注意到前后的分析.

本题中，确定圆心的位置还有其他方法吗？（学生议论片刻.）

生：圆心的位置还可以这样考虑，它同时满足两个条件：一是到 $\angle AOB$ 一边 OA 的距离等于定长 R；二是到 $\angle AOB$ 的另一边 OB 的距离也等于定长 R. 满足这两个条件的两个轨迹在 $\angle AOB$ 内的交点就是所求圆心的位置.

师：完全正确. 学习上应有这种积极思考，努力寻求各种解法的进取精神.

[在教学过程中，对学生积极正确地回答问题，应给予表扬和肯定，以增强他们的自信心. 同时，在教学中，当提出的问题解决后，及时地引导学生开展一题多解的思考和研究，使学生获得的知识更加深化，这样既能开拓思路，又能培养创造能力.]

三、适当增加范例分析，强化理解和记忆

师：（板书）已知三角形的一边长，这边上的中线长及这边所对的角，求作这个三角形.

请同学们写出已知和求作.

（教师画草图，引导学生正确地用数学语言写出已知和求作.）

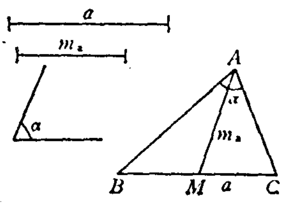


图 3

生：已知：线段 a、m_a 和角 α.

求作：$\triangle ABC$，使 $BC=a$，BC 边上的中线 $AM=m_a$，$\angle BAC=\alpha$.

师：分析：设 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形（图 3），因为 BC 的长为 a，故点 B、C 的位置是确定了的，因此要作 $\triangle ABC$ 就只要确定顶点 A 的位置. 请同学们考虑，我们是否仍可用交轨法确定点 A 的位置？如果可以，点 A 的位置必须符合哪两个条件？它是由哪两个轨迹的交点

确定的?

生: 可用交轨法确定点 A 的位置. 点 A 的位置符合两个条件: 一是 $\angle BAC=\alpha$; 二是 BC 边上的中线 $AM=m_a$. 符合 $\angle BAC=\alpha$ 的点的轨迹是以 BC 为弦, 所含圆周角等于 α 的两条弓形弧(不含 B、C 两点); 符合 $AM=m_a$ 的点的轨迹是以 BC 中点 M 为圆心, m_a 为半径的圆. 这两个轨迹的交点就是 $\triangle ABC$ 的顶点 A.

师: 回答得很好. 作法和画图请同学们写在课堂练习本上, 并保留作图痕迹.

(教师发觉大部分学生业已完成作图后, 便出示小黑板上的标准作图(图 4), 并请同学们与其对照比较.)

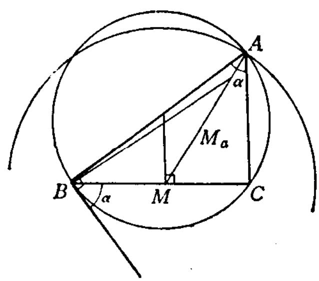


图 4

[作图时, 要教会学生使用分析法, 即首先假设图形已经作好, 并标出图中的已知点、线段和角, 这样做, 易于直观地找出作图的关键.]

师: 这道作图题是否一定有解? 如果不一定, 那么在什么情况下有解, 在什么情况下无解, 请有兴趣的同学课后去研究.

下面, 我们来做课堂练习.

(出示小黑板.)

已知 ⊙O 上一点 A 及圆外一点 B, 过点 B 作圆并和 ⊙O 相切于点 A.

(提示: 由于已知点 A 在 ⊙O 上的位置不同, 所作的圆和已知圆可能外切于点 A, 也可能内切于点 A.)

四、布置作业

课本练习及习题(略).

教案说明

(1) 本节课是在确认学生已经掌握轨迹的定义及六个基本轨迹的前提下安排的.课本上仅以一道例题出现,如果对这道例题仅仅是蜻蜓点水一带而过,显然达不到教材安排的意图,而且学生也会很快遗忘.为了加强学生对六个基本轨迹的掌握和应用,突出本节课的数学思想和方法,明确地提出了“交轨法作图”这一新的概念,并对此作了较透彻的分析. 这对学生熟练掌握交轨法作图的一般方法和步骤,以及今后学习高中数学知识具有重要的作用.

(2) 在教案的设计中,把原教材的内容作了一些调整,即先从实际问题导入,然后讲例题. 这样做有利于激发学生学习的兴趣,使他们能立即进入探索思维的情境,有利于理论和实际的结合.兴趣是思维的先导,教学中不能激发学生浓厚的学习兴趣,就不可能使学生积极思维,这样势必导致课堂气氛沉闷,教学形式呆板,也不可能达到良好的教学效果.

(3) 本节课以问答法作为主要教学方式,力求将教师的主导作用与学生的主体作用有机地结合起来. 问答法有利于调动学生学习的主动性、积极性,使学生能达到发现问题,探索途径,解决问题等一系列能力的培养. 在设计问题时,应力求具体明确、难易得当,不仅要注意这些问题的系统性,还要求符合学生思维的程序,这样才能引导学生逐步深入,得出结论.

本节课对于教材的重点和关键问题,教师进行了严密的讲授,以加强学生的理解和注意. 为使学生通过动手、动脑获得真知,活跃思维,教学中还穿插了指导阅读、课堂讨论等教学方式. 总之,初中数学教学,应考虑到初中学生的年龄特点,在同一堂课中采用多种教学方式. 否则,会使学生感到乏味和疲劳,从而造成学生分散注意力,降低思维的积极性和思维效果.